筆筒問題探討

陳 清 瑛

一、前言：

在競賽理論（ Game Theory ）中，有一個有趣的問題如下，吾人不妨稱之為 **筆筒問題**。設有兩個筆筒各放置 a ，b 枝筆，現有甲、乙二人輪流自二筒中之任一筒，每次至少取一枝筆，但至多取 ℓ 枝筆（ $\ell \leqq a$ ，$\ell \leqq b$ ），規定最後將筆全部取出者勝利。問當 a ，b 有什麼關係時，可得結論為：先取者必有獲勝之策略。

對於不太大的定值 a ，b 吾人一般可利用圖形學的理論來討論處理，可是其一般化問題却令人困擾，因此，本文的目的乃在於冀望能提供一個明確的、理論的解決方式。

二、競賽圖形：

欲討論筆筒問題，我們必須將競賽的全部過程畫成一個有向圖形，此圖形稱為競賽圖形［ 2 ］。若第一個筆筒與第二個筆筒中分別放有 a ，b 枝筆，則記之為（ a ，b ），稱之為競賽圖形的“起點”，比賽終了之點，稱為競賽圖形的“終點”。

定義：在競賽圖形中，若一個頂點為

① 比賽終了之點 或

② 自該點出發之有向線段之端點均為敗點

則此點稱為勝點。而與勝點相鄰之點稱為敗點。

定義：設頂點集合 K 是有向圖形 G 之頂點集合 $V(G)$ 的一個部分集合。若 K 滿足下列二條件：

(1) K 中任意二頂點均不相鄰；

(2) 每一個 $V(G)$ 中之頂點 v ，若 $v \notin K$ ，則必有一個有向邊由 v 到 K 中之某一頂點

則稱 K 為 G 的核（ kernel ）。

定理：全部勝點所成的集合為競賽圖形之核，記為 K 。

證明：見［ 2 ］。

定理：若起點在核中，則後取點必有勝利之策略。

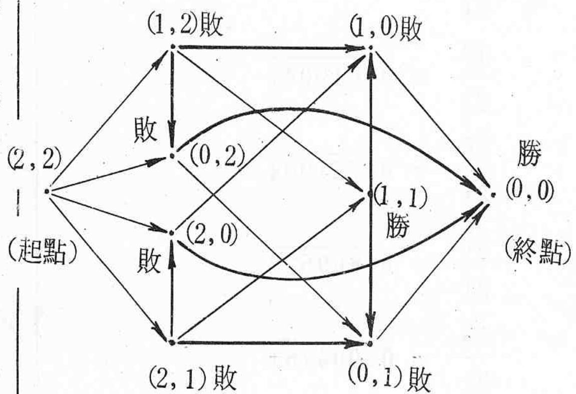
證明：見［ 2 ］。

定理：若起點不在核中，則先取者必有勝利之策略。

證明：見［ 2 ］。

例：設有兩個筆筒，各放兩枝筆，現有甲、乙兩人輪流自二筒中之任一筒，每次至少取一枝筆，但至多取二枝筆，規定最後將筆全部取出者勝利，試求其結論。

解：利用競賽圖形表之如下：



依定義知終點（ 0 ，0 ）為勝點，而（ 1，0 ），（ 0 ，1 ），（ 2 ，0 ），（ 0 ，2 ）均與勝點（ 0 ，0 ）相鄰，（各有一有向線段進入（ 0 ，0 ）），故皆為敗點，又自（ 1 ，1 ）出發之有向線之端點（ 1 ，0 ），（ 0 ，1 ）均為敗點，故（ 1 ，1 ）為勝點。

同法討論，得知（ 1 ，2 ），（ 2 ，1 ）均為敗點而（ 2 ，2 ）為勝點。故

$K = \{（2，2），（1，1），（0，0）$

又起點 $(2,2)\in K$，所以，後取者有勝利之策略。

三、理論演繹：

在以下的討論中，吾人均假設每人每次僅可自一筒中，至少取出一枝筆，至多取出 ℓ 枝筆，且規定最後將筆全部取出者得勝。

引理1：若 $(k,k)\in K$，則 $(k+1,k+1)\in K$，$\forall k\in \mathbf{N}\cup\{0\}$，其中 $k+1\leqq \min\{a,b\}$

證：以歸納法原理證之。

當 $(k,k)=(0,0)\in K$ 時，僅有 $(1,0)$，$(2,0)$，……$(\ell,0)$ 及 $(0,1)$，$(0,2)$，……$(0,\ell)$。

這 2ℓ 個頂點出發的有向線段可到達 $(0,0)$ 依定義知此 2ℓ 個頂點均為敗點。而由 $(1,1)$ 出發僅可到達 $(1,0)$，$(0,1)$ 二頂點，此二頂點均為敗點，故 $(1,1)\in K$，即原式為眞。

現假設當 $1\leqq k\leqq n-1$ 時，原式均成立

吾人欲證：若 $(n,n)\in K$，

則 $(n+1,n+1)\in K$，其中 $n+1\leqq \min\{a,b\}$

今僅有 $(n,n+i)$，$(n+i,n)$，$i=1,2,\cdots\cdots,\ell$

這 2ℓ 個頂點出發的有向線段可到達 (n,n)

而 $(n,n)\in K$

故 $(n,n+i)$，$(n+i,n)$，$i=1,2,\cdots\cdots\ell$ 均為敗點

又由 $(n+1,n+1)$ 出發之點，至多可能到達下列 2ℓ 個頂點：

$(n+1,n)$，$(n+1,n-1)$，……$(n+1,n-\ell+1)$

$(n,n+1)$，$(n-1,n+1)$，……，$(n-\ell+1,n+1)$

其中 $n-\ell+1\geqq 0$

而 $(n,n)\in K$，故 $(n+1,n)\notin K$；

$(n-1,n-1)\in K$，故 $(n+1,n-1)\notin K$；

……………………………………………………

$(n-\ell+1,n-\ell+1)\in K$，

故 $(n+1,n-\ell+1)\notin K$

同理 $(n,n+1)$，$(n-1,n+1)$，……，$(n-\ell+1,n+1)$ 均為敗點

故 $(n+1,n+1)\in K$

引理2：若 $(0,0)\in K$，則

$(k,k-(\ell+1))\in K$，

$(k-(\ell+1),k)\in K$，

$\forall k\geqq \ell+1$，$k\leqq \max\{a,b\}$

證：吾人僅需證明 $(k,k-(\ell+1))\in K$

當 $k=\ell+1$ 時，

$(k,k-(\ell+1))=(\ell+1,0)$

因 $(0,0)\in K$，依引理1知

$(1,1)\in K$，……，$(\ell+1,\ell+1)\in K$

而 $(\ell+1,\ell+1)\in K$ 推演得

$(\ell+1,\ell)$，$(\ell+1,\ell-1)$，……，$(\ell+1,1)$ 均為敗點

現 $(\ell+1,\ell+1)$ 不能到達 $(\ell+1,0)$，且由 $(\ell+1,0)$ 出發至多僅可到達 $(\ell,0)$，$(\ell-1,0)$，……，$(1,0)$

而 $(\ell,\ell)\to(\ell,0)$

$(\ell-1,\ell-1)\to(\ell-1,0)$

……………………………………………………

$(1,1)\to(1,0)$

其中 $(\ell,\ell)\in K$，……，$(1,1)\in K$

故 $(\ell,0)$，$(\ell-1,0)$……，$(1,0)$ 均為敗點

所以，依定義知 $(\ell+1,0)$ 為勝點，亦即當 $k=\ell+1$ 時，原式為眞。

其次，設 $k=\ell+1,\ell+2,\cdots\cdots,\ell+n$ 時，原式均成立

吾人欲證 $k=\ell+n+1$ 時，原式亦成立

因 $(0,0)\in K$，依引理1知

$(1,1)\in K$，$(2,2)\in K$，……，$(\ell+n+1,\ell+n+1)\in K$

又因 $(\ell+n+1,\ell+n+1)\in K$，

故 $(\ell+n+1,\ell+n)$，$(\ell+n+1,\ell+n-1)$，……，$(\ell+n+1,n+1)$ 均為敗點。

現 $(\ell+n+1,\ell+n+1)$ 不能到達 $(\ell+n+1,n)$ 且由 $(\ell+n+1,n)$

出發，至多僅可能到達 $(\ell+n, n)$，$(\ell+n-1, n)$，……$(n+1, n)$ 及 $(\ell+n+1, n-1)$，$(\ell+n+1, n-2)$，……，$(\ell+n+1, n-\ell)$

而 $(\ell+n, \ell+n) \to (\ell+n, n)$

$(\ell+n-1, \ell+n-1) \to (\ell+n-1, n)$

……………………………………

$(n+1, n+1) \to (n+1, n)$

因 $(\ell+n, \ell+n) \in K$，$(\ell+n-1, \ell+n-1) \in K$，……，$(n+1, n+1) \in K$，故(1) $(\ell+n, n)$，$(\ell+n-1, n)$，……，$(n+1, n)$ 均為敗點

又 $(\ell+n+1, n-1) \to (\ell+n, n-1)$

其中 $(\ell+n)-(n-1)=\ell+1$

$(\ell+n+1, n-2) \to (\ell+n-1, n-2)$

其中 $(\ell+n-1)-(n-2)=\ell+1$

……………………………………

$(\ell+n+1, n-\ell) \to (n+1, n-\ell)$

其中 $(n+1)-(n-\ell)=\ell+1$

依歸納法假設知 $(\ell+n, n-1)$，……，$(n+1, n-\ell)$ 均為勝點，故

(2) $(\ell+n+1, n-1)$，$(\ell+n+1, n-2)$，……$(\ell+n+1, n-\ell)$ 均為敗點。

由(1)，(2)知 $(\ell+n+1, n)$ 為勝點

即：當 $k=\ell+n+1$ 時，原命題亦成立

故：$(0, 0) \in K \Rightarrow (k, k-(\ell+1)) \in K$

$\forall k \geq \ell+1$，$k \leq \max\{a, b\}$

引理3：若 $(0, 0) \in K$，則 $(m(\ell+1), 0) \in K$，$(0, m(\ell+1)) \in K$，$\forall m \in N \cup \{0\}$，$m(\ell+1) \leq \max\{a, b\}$

證：吾人僅需證明 $(m(\ell+1), 0) \in K$

當 $m=0$ 時，$(m(\ell+1), 0)$ 即 $(0, 0)$，顯然成立。

當 $m=1$ 時，依引理2之證明的第一部分，可得 $(\ell+1, 0) \in K$

現設 $m=n$ 時，原式為眞，即

$(n(\ell+1), 0) \in K$ 故

$(n(\ell+1)+1, 0)$，……，$(n(\ell+1)+\ell, 0)$ 均為敗點………(1)

又由 $((n+1)(\ell+1), 0)$ 出發，至多可能到達下列各頂點：

$((n+1)(\ell+1)-1, 0)$
$=(n(\ell+1)+\ell, 0)$

$((n+1)(\ell+1)-2, 0)$
$=(n(\ell+1)+(\ell-1), 0)$

……………………………………

$((n+1)(\ell+1)-\ell, 0)$
$=(n(\ell+1)+1, 0)$

由(1)知，均為敗點。

故 $((n+1)(\ell+1), 0)$ 為勝點，即當 $m=n+1$ 時，原命題亦成立。依歸納法原理得證。

引理4：若 $(0, 0) \in K$，則 $(k, k-m(\ell+1)) \in K$，$(k-m(\ell+1), k) \in K$

$\forall k, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$，其中

$k-m(\ell+1) \geq 0$，

$k \leq \max.\{a, b\}$

證：(1) 首定固定 m，證明 $(k, k-m(\ell+1)) \in K$，$\forall k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$，其中

$k-m(\ell+1) \geq 0$，

$k \leq \max\{a, b\}$

當 $k=m(\ell+1)$ 時

$(k, k-m(\ell+1))$
$=(m(\ell+1), 0)$，

依引理3知 $(m(\ell+1), 0) \in K$

現假設當 $k=m(\ell+1)$，……，$m(\ell+1)+n$ 時，原命題均成立。

即：$(m(\ell+1)+i, i) \in K$，$i=0, 1, 2, \ldots\ldots, n$

欲證：$(m(\ell+1)+(n+1), (n+1)) \in K$

因由 $(m(\ell+1)+(n+1), (n+1))$ 出發，至多可到達

$(m(\ell+1)+n, n+1), \cdots\cdots,$
$(m(\ell+1)+n-\ell+1, n+1)$
及 $(m(\ell+1)+(n+1), n),$
$\cdots\cdots, (m(\ell+1)+(n+1),$
$n-\ell+1)$ 這 2ℓ 個頂點。
而 $(m(\ell+1)+n, n+1)$
$\to(m(\ell+1)+n, n)$
$(m(\ell+1)+n-1, n+1)$
$\to(m(\ell+1)+(n-1),$
$(n-1))$
……………………………………………
$(m(\ell+1)+n-\ell+1, n+1)$
$\to(m(\ell+1)+(n-\ell+1),$
$(n-\ell+1))$
$(m(\ell+1)+(n+1), n)$
$\to(m(\ell+1)+n, n)$
$(m(\ell+1)+(n+1), n-1)$
$\to(m(\ell+1)+(n-1),$
$(n-1))$
……………………………………………
$(m(\ell+1)+(n+1),$
$n-\ell+1)$
$\to(m(\ell+1)+(n-\ell+1),$
$(n-\ell+1))$
依歸納法假設知 $(m(\ell+1)+n,$
$n), \cdots\cdots (m(\ell+1)+(n-\ell$
$+1), (n-\ell+1))$ 均爲勝點，故
$(m(\ell+1)+n, n+1), \cdots\cdots,$
$(m(\ell+1)+n-\ell+1, n+1)$
及 $(m(\ell+1)+(n+1), n),$
$\cdots\cdots, (m(\ell+1)+(n+1),$
$n-\ell+1)$ 均爲敗點。故
$(m(\ell+1)+(n+1), (n+1))$
$\in K$
即：當 $k=m(\ell+1)+(n+1)$ 時，原命題亦成立，故得證(1)。

(2) 其次，固定 k，證明 $(k, k-m(\ell+1))\in K$，$\forall m\in N\cup\{0\}$
其中 $k-m(\ell+1)\geq 0$，
$k\leq \max.\{a, b\}$
當 $m=0$ 時，原式爲 (k, k)，件引理1知 $(k, k)\in K$
當 $m=1$ 時，依引理 2 亦成立（其中 $k-(\ell+1)\geq 0$）
現假設 $m=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$ 時，原命題均爲眞（其中 $k-m(\ell+1)\geq 0$）
考慮 $m=n+1$，$k-m(\ell+1)\geq 0$ 時之情況
因由 $(k, k-(n+1)(\ell+1))$ 出發，至多可到達下列 2ℓ 個頂點。
即：$(k-1, k-(n+1)(\ell+$
$1)), \cdots\cdots, (k-\ell, k-(n+$
$1)(\ell+1))$ 及 $(k, k-(n+$
$1)(\ell+1)-1), \cdots\cdots, (k, k-$
$(n+1)(\ell+1)-\ell)$
而 $(k-1, k-(n+1)(\ell+1))$
$\to(k-1, k-1-n(\ell+1))$
$(k-2, k-(n+1)(\ell+1))$
$\to(k-2, k-2-n(\ell+1))$
……………………………………………
$(k-\ell, k-(n+1)(\ell+1))$
$\to(k-\ell, k-\ell-n(\ell+1))$
$(k, k-(n+1)(\ell+1)-1)$
$\to(k-1, k-(n+1)(\ell$
$+1)-1)$
$(k, k-(n+1)(\ell+1)-2)$
$\to((k-2), k-(n+1)$
$(\ell+1)-2)$
……………………………………………
$(k, k-(n+1)(\ell+1)$
$-\ell)$
$\to(k-\ell, k-(n+1)(\ell$
$+1)-\ell)$
由第(1)部分知
$(k-1, k-1-n(\ell+1)),$
$\cdots\cdots, (k-\ell, k-\ell-n(\ell+1))$
及 $(k-1, k-(n+1)(\ell+1)$
$-1), \cdots\cdots, (k-\ell, k-(n+1)$
$(\ell+1)-\ell)$ 均爲勝點，故
$(k-1, k-(n+1)(\ell+1))$
$, \cdots\cdots, (k-\ell, k-(n+1)$
$(\ell+1))$ 及 $(k, k-(n+1)$

固然小於 2^7，但 $2\times 3\times 5$ 並不小於 $2^3\times 3$。所以「含8個正因數的最小自然數」是 $2^3\times 3$ 而不是 $2\times 3\times 5$。

$(\ell+1)-1)$，……，$(k, k-(n+1)(\ell+1)-\ell)$均爲敗點，所以$(k, k-(n+1)(\ell+1)) \in K$

即：當$m=n+1$時，原命題亦成立，故得證(2)。

依(1)，(2)知　當$(0, 0) \in K$時，$(k, k-m(\ell+1)) \in K$，$\forall k, m \in N \cup \{0\}$

其中$k-m(\ell+1) \geqq 0$，$k \leqq \max.\{a, b\}$

四、結論：

在前述規定之下，經由上面討論得知：

定理：若存在$m \in \{0, 1, 2, \cdots\cdots\}$，使得$|a-b|=m(\ell+1)$成立，則$(a, b)$必爲勝點。即後取者有勝利的策略；否則，先取者有勝利的策略。

於實際競賽中，首先應檢查$|a-b|$之值，以決定該先取或後取，而立於不敗之地，其次，在競賽過程中的每一策略均應來自核中之元素，如此，自能獲勝。

五、運用：

例1：設$a=b=3$，$\ell=2$

解：依題意知$(0, 0) \in K$，由引理1

$(0, 0) \in K \Rightarrow (1, 1) \in K$

$\Rightarrow (2, 2) \in K \Rightarrow (3, 3) \in K$

又因$(3, 3) \in K$，$\ell=2$

故$(3, 3-(2+1))=(3, 0) \in K$，

$(3-(2+1), 3)=(0, 3) \in K$

所以

$K=\{(3, 3), (2, 2), (1, 1), (0, 0), (3, 0), (0, 3)\}$

現因$(3, 3) \in K$，故後取者有勝利之策略。

例2：設$a=2$，$b=3$，$\ell=2$

解：依引理1知$(0, 0)$，$(1, 1)$，$(2, 2)$均屬於K。

依引理2知$(3-(2+1), 3)=(0, 3) \in K$

故$K=\{(2, 2), (1, 1), (0, 0), (0, 3)\}$

而$(2, 3) \notin K$，故先取者有勝利之策略。

例3：設$a=b=4$，$\ell=2$

解：$K=\{(4, 4), (3, 3), (2, 2), (1, 1), (0, 0), (4, 1), (1, 4), (3, 0), (0, 3)\}$

而$(4, 4) \in K$，故後取者有勝利之策略。

例4：設$a=b=5$，$\ell=2$

解：$K=\{(5, 5), (4, 4), (3, 3), (2, 2), (1, 1), (0, 0), (5, 2), (2, 5), (4, 1), (1, 4), (3, 0), (0, 3)\}$

因$(5, 5) \in K$，故後取者有勝利之策略。

例5：設$a=9$，$b=4$，$\ell=2$

解：$K=\{(4, 4), (3, 3), (2, 2), (1, 1), (0, 0), (9, 3), (9, 0), (8, 2), (7, 4), (7, 1), (6, 3), (6, 0), (5, 2), (4, 1), (1, 4), (3, 0), (0, 3)\}$

因$(9, 4) \notin K$，故先取者有勝利之策略。

例6：設$a=9$，$b=4$，$\ell=3$

解：$K=\{(4, 4), (3, 3), (2, 2), (1, 1), (0, 0), (9, 1), (8, 4), (8, 0), (7, 3), (6, 2), (5, 1), (4, 0), (0, 4)\}$

因$(9, 4) \notin K$，故先取者有勝利之策略。

六、致謝：

本文承蒙國立臺灣師範大學數學系教授吳森原博士之指導，謹此致謝。

七、參考資料：

(1)　吳森原；"優選理論"（講稿）

(2) N. Deo; " Graph Theory with applications to engineering and computer Science ", Prentice-Hall, Inc., 1974, Chapter 14.

(3) M. Gardner; " Mathematical games ", Sci. Am. Vol. 226, No. 1, 1972, 104 ~ 107.

(4) C. A. Smith; " Graphs and composite games ", Journal Combinatorial Theory, Vol I, 1966, 51 ~ 81.

本文作者現任教於省立馬公高中