有趣的循環小數

王 湘 君

我們以除法計算一下$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{8}$和$\frac{1}{9}$時，發現$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，及$\frac{1}{8}$都是有限小數，而其它的則不然。如果我們事先想知道一個分數是不是有限小數時，只須看分母可不可以化成10的乘冪。

例如：

$$0.142=\frac{142}{1000}=\frac{142}{10^3}$$

這個分數不是最簡分數，因為$142=2\cdot71$，$10^3=2^3\cdot5^3$，因此

$$0.142=\frac{2.71}{2^3\cdot5^3}=\frac{71}{2^2\cdot5^3}=\frac{71}{500}$$

但發現一項很重要的事實：分母除了2和5以外沒有其他的質因數。因為$10^n=2^n\cdot5^n$　$(n\in N)$，一個有限小數的最簡分數的分母，不可能有2和5以外的質因數了。反過來說，假如a/b是最簡分數，b除了2和5外沒有其他質因數，我們就可找到一個等值的分數，它的分母是10的乘冪，而這個分數就可化為有限小數。下面的例子可以說明

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot5}{2\cdot5}=\frac{5}{10}=0.5$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=\frac{5^2}{2^2\cdot5^2}=\frac{25}{10^2}=0.25$$

$$\frac{1}{5}=\frac{1\cdot2}{5\cdot2}=\frac{2}{10}=0.2$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=\frac{5^3}{2^3\cdot5^3}=\frac{125}{10^3}=0.125$$

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{2^2\cdot5}=\frac{1.5}{2^2\cdot5^2}=\frac{5}{10^2}=0.05$$

$$\frac{1}{25}=\frac{2^2}{2^2\cdot5^2}=\frac{4}{100}=0.04$$

於是我們可以下一個結論：一個最簡分數a/b，如果可化成有限小數，僅有且僅有分母b除了2和5的因數外，別無其他因數。

一個有理數可表為有限小數或無限但循環的小數，這個道理可以由計算1／7來看。

```
       0.142857
   7 ) 1.000000
       0
       ①0
        7
        ③0
        28
         ②0
         14
          ⑥0
          56
           ④0
           35
            ⑤0
            49
             1
```

請注意用圓圈起的餘數。

由前面的分析我們知道1／7不是有限小數，所以在除法過程中，不可能餘0，因此被7除，其可能的餘數只有1，2，3，4，5，和6。從上面圈起來的餘數，我們看到這些數都出現過一次，因此下一個餘數，必定和前面的某一個餘數相同，所以就形成循環的現象。1／7可以表成循環小數0.142857142857142857…………

有一串含6個小數一再地重複出現，這一串小數叫做循環節，標準的表示法是在循環節上加一短線

$$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$$

一般說來，設$a<b$，且a/b不為有限小數，因此在餘數中，不可能有0，所有可能的餘數是1，2，3，……$b-1$。假如所有的數都出現過

一次，則下一個餘數，必定和前面某一餘數相同。在某些情形，當所有可能的餘數全部出現以前，就有與前面相同的餘數會出現。這兩種情況的結果，都是循環小數。但循環節中最多含有 $b-1$ 個數。

值得注意的是小數點的位置不可馬虎，因爲 1 被 7 除的計算過程和 10^6 被 7 除的計算過程相同。我們來看看 10^6 被 7 除的結果，商是 142857 餘 1，因此

$$\frac{10^6}{7} = 142857.\overline{142857}$$

我們再看

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$$

$$\frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421}$$

觀察了 1／7，1／17 和 1／19 的小數表示法，我們是否可以下結論說，凡是分母是一個質數 p（但不是 2 或 5）的分數，其小數表示中，循環節含有 $p-1$ 位小數。很快地，我們從 $1/3=0.\overline{3}$ 知道這個結論是不對的。$1/13=0.\overline{076923}$ 也是一個反例，循環節只含 6 位小數。

我們比較一下 2／7 與 1／7 的小數表示

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad , \quad \frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

發現循環節裡的小數完全相同，而且呈相同的順序排列，只是頭一個數字不同。

$$
\begin{array}{rl}
 & 0.142857 \\
7 & \overline{)1.000000} \\
 & \underline{0} \\
 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
\rightarrow & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 0.285714 \\
7 & \overline{)2.000000} \\
 & \underline{0} \\
\rightarrow & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 2
\end{array}
$$

從箭頭所指的餘數開始，以後的情況都完全相同，所以有相同的小數，而且呈相同的順序排列，只要看一看 1／7 的算式，我們就可以得到

$$\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$$

$$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$$

$$\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

現在我們可以下結論說：一個最簡分數的循環節的多寡，全賴於分母而與分子無關。

定理 1： 設一個最簡分數的分母，形如 $2^r\cdot 5^s\cdot k$，其中 $k>1$，而且 k 不含 2 或 5 的因子，則其小數表示中，不循環部分有 $\max(r,s)$ 個，而循環部分有 n 個，其中 n 是滿足 $k \mid 10^n-1$ 的最小正整數。

證明： 設一最簡分數的分母爲 $2^r\cdot 5^s\cdot k$，其中 $k>1$ 而且 k 不含 2 或 5 的因子。

令 $\max(r,s)=r$

把這分數乘上 $2^r\cdot 5^r$，分母只剩下 k。

由前面的分析，知道一個分數的循環節的多寡，全賴於分母而與分子無關。因此循環節

的多寡決定於$\frac{1}{k}$。若n是滿足$k \mid 10^n-1$的最小正整數，令$\frac{10^n-1}{k}=q$

則$\frac{1}{k}=q\cdot\frac{1}{10^n-1}$，而$\frac{1}{10^n-1}$的循環節恰有$n$位，故原分數的循環節亦有$n$位。

（作者註：將純循環小數化為分數，若循環節有n位，其分母即為10^n-1）

根據此定理，若$r=s=0$時，則沒有不循環的部分。這時我們稱此小數為純循環小數。

例：$$\frac{1}{28}=0.03\overline{571428}$$

根據定理1，$28=2^2\cdot 7$，$r=2$，$s=0$，$k=7$

所以$\frac{1}{28}$的小數中，含兩個不循環的小數，循環節有6個小數，因為7是10^6-1的因子，而不是10^n-1（$0<n<6$）的因子。我們看下面的式子，對不循環的部分就更瞭解了。

$$\frac{1}{28}=\frac{1}{2^2\cdot 7}$$

$$100\cdot\frac{1}{28}=2^2\cdot 5^2\cdot\frac{1}{2^2\cdot 7}=\frac{25}{7}$$

$$=3\frac{4}{7}=3.\overline{571428}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{3.\overline{571428}}{100}$$

$$=0.03\overline{571428}$$

很明顯地，我們為什麼用100去乘$\frac{1}{28}$，因為這樣一來，分母就不再含2或5的因子，而且100是10的乘冪中最小的值使分母不含2或5的因子。再值得注意的是，最後一個步驟，用100去除，得到兩個不循環的小數，而循環的部分，只決定於$\frac{1}{28}$的分母的因子7。

由定理1，我們只要檢驗10^n-1的因子，就可決定有關分數的循環節的多寡。當$n\leq 6$時，10^n-1的因子很容易求得。

$$10^1-1=3^2$$
$$10^2-1=3^2\cdot 11$$
$$10^3-1=3^3\cdot 37$$
$$10^4-1=3^2\cdot 11\cdot 101$$
$$10^5-1=3^2\cdot 41\cdot 271$$
$$10^6-1=3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$$

從上表中，很明顯地看出分母為101的分數，循環節就有4個小數。因為101是10^4-1的因子，而不是10^n-1，$n\leq 3$的因子。同樣地，分母是41，循環節有5位小數。我們從表上也可看到21是10^6-1的因子，所以，一個最簡分數的分母是21，那麼循環節就有6位小數。

再進一步我們發現，分母是質數p，那麼循環節的小數個數是$p-1$的因數，這可由下面定理推得。

定理2： 假如最簡分數$\frac{a}{b}$，b不含2或5的因子，則循環節的小數個數是$\phi(b)$的因子。而$\phi(b)$是小於b而與b互質的正整數個數。

證明： 以a除以b其可能的餘數是小於b而與b互質的正整數。令$\phi(b)$表小於b而與b互質的正整數個數，因此$\frac{a}{b}$的循環節的位數不大於$\phi(b)$。以a除以b，一直計算下去，直到餘數重複出現為止，若所有可能的餘數全部出現，則循環節的個數恰為$\phi(b)$；若餘數只出現了其中一部分，這些數除以b以後，都會有相同的餘數而且呈一定的順序排列，只是頭一個小數不同而已，我們把這些數歸在同一組裡。同理，其他小於b而與b互質的正整數除以b後，有相同的情況。於是這些小於b而與b互質的正整數，平均分成若干組，若每組有n個，則循環節就有n個。故$n\mid\phi(b)$。

一個質數p，$\phi(p)=p-1$，因為小於p的正整數皆與p互質。而合成數n，$\phi(n)<n-1$，例如21，小於21而與21互質的正整數有1，2，4，5，8，10，11，13，16，17，19及20，所以$\phi(21)=12$，由定理2，我們知道；$\frac{1}{21}$的循環節的個數是$\phi(21)=12$的因子。讓我們來

檢驗一下。

$$\frac{1}{21} = 0.\overline{047619}$$

循環節有6位小數，6恰爲 12 的因子。

我們比較一下 $\frac{2}{21} = 0.\overline{095238}$ 的循環節與 $\frac{1}{21}$ 的完全不同，於是我們再繼續算下去。（不妨用電算機）

$$\frac{1}{21} = 0.\overline{095238}$$

$$\frac{2}{21} = 0.\overline{190476}$$

$$\frac{4}{21} = 0.\overline{238095}$$

$$\frac{5}{21} = 0.\overline{238095}$$

$$\frac{8}{21} = 0.\overline{380952}$$

$$\frac{10}{21} = 0.\overline{476190}$$

$$\frac{11}{21} = 0.\overline{523809}$$

$$\frac{13}{21} = 0.\overline{619047}$$

$$\frac{16}{21} = 0.\overline{761904}$$

$$\frac{17}{21} = 0.\overline{809523}$$

$$\frac{19}{21} = 0.\overline{904761}$$

$$\frac{20}{21} = 0.\overline{952380}$$

從上表中，我們看到這 12 個分母是 21，而分子小於 21 的最簡分數（因爲 $\phi(21)=12$）中，$\frac{1}{21}$，$\frac{4}{21}$，$\frac{10}{21}$，$\frac{13}{21}$，$\frac{16}{21}$ 和 $\frac{19}{21}$ 的循環節的小數相同，且呈同一順序的排列，$\frac{2}{21}$，$\frac{5}{21}$，$\frac{8}{21}$，$\frac{11}{21}$，$\frac{17}{21}$ 及 $\frac{20}{21}$ 有相同的情況。如果我們算一下，1 被 21 除，餘數只可能是 1，4，10，13，16 及 19 。2 被 21 除，餘數就是其餘的 6 個小於 21 而與 21 互質的整數。（爲什麼與 21 不互質的整數，不可能是餘數？）

我們再看分母是 41 的分數，如果我們手頭有部迷你計算機就方便了，我們就可以很快地決定 $\frac{1}{41}$，$\frac{2}{41}$，$\frac{3}{41}$，$\frac{4}{41}$，……，$\frac{40}{41}$ 的小數，很明顯地看出這些分數，分成八組，每組5個，這是根據循環節來分的。

$$\frac{1}{41} = 0.\overline{02439} \qquad \frac{2}{41} = 0.\overline{04878}$$

$$\frac{10}{41} = 0.\overline{24390} \qquad \frac{20}{41} = 0.\overline{48780}$$

$$\frac{16}{41} = 0.\overline{39024} \qquad \frac{32}{41} = 0.\overline{78048}$$

$$\frac{18}{41} = 0.\overline{43902} \qquad \frac{33}{41} = 0.\overline{80487}$$

$$\frac{37}{41} = 0.\overline{90243} \qquad \frac{36}{41} = 0.\overline{87804}$$

如果讀者有興趣的話，可以看看其他6組的情況。

這篇短文的內容，希望能引導我們學習數論的興趣。當高斯十多歲時，這類理論提供了他很有價值的資料，他的進一步探討，以致使他在二十四歲時，出版了「算術探究」。（Research in Arithmetic），這本書對現代數論走下第一步，高斯在他十多歲時，就把1到1000的倒數計算出其小數來。當然那時，他沒有任何計算機，現在您有了一架電算機，您只要花一點工夫，就可以發覺很多有趣而迷人的事實，像高斯那樣。

本文作者現任教於師大附中