錐線直徑之求法與應用

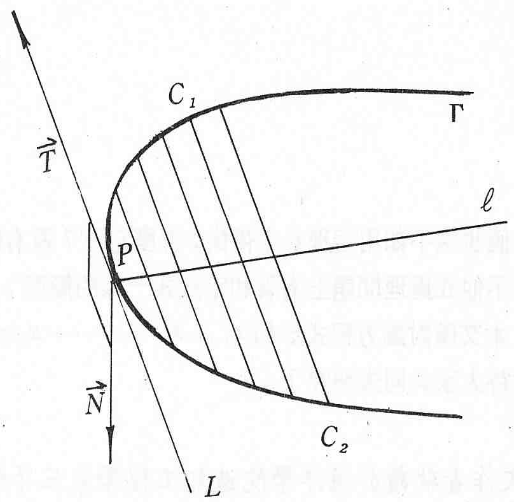
蔡聰池

一、錐線直徑的求法

開宗明義的說，錐線平行弦的中點所成的集合稱爲這錐線的直徑，而直徑所在直線的方程式在時下的課本中，並沒有一般性的公式可資利用。（如東華本第四册155～161頁）

因此，在這裏我們給出下列的求法：

設定：錐線 Γ ： $f(x,y)=0$ （如圖）



$f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$

一組平行弦的斜率 $m\neq 0$ 於是，這組中任一弦 $\overline{C_1C_2}$ 所在的直線方程式都是

$$y=mx+k \quad , \quad k\in R$$

當然，包括了切點 P 的切線 L 在內。

因此，我們可以認定：

$$\vec{T}(1,m),\vec{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

即爲 L 的切線與主法線方向的向量，所以，

$$\vec{T}\cdot\vec{N}=0$$

得： $l:\dfrac{\partial f}{\partial x}+m\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ …(*)即爲所求。

例一：由標準式拋物線 Γ ： $x^2+4y-8=0$ 的一組平行弦以 $m=-2$ 爲斜率，求這組弦的中點所在的直線方程式。

解：利用(*)即可求得：$(2x)+(-2)(4)=0$

也就是說，這組弦的中點都在直線 ℓ ： $x=4$ 上。

例二：推廣到一般式拋物線

$\Gamma: 4x^2-4xy+y^2+8x+6y-7=0$

的一組平行弦以 $m=1/2$ 爲斜率，求這組弦的中點所在的直線方程式。

解：利用（*）即可求得：

$$(8x-4y+8)+\left(\frac{1}{2}\right)(-4x+2y+6)=0$$

也就是說，這組弦的中點都在直線

$\ell: 6x-3y+11=0$ 上。

二、錐線直徑的應用

至於直徑所在的直線方程式的應用，在時下的課本中更付之闕如。因此，在這裏我們提出如下的構想。舉凡有關錐線Min－Max 問題，拿它當主角，總有逢凶化吉之效。

例三：設拋物線 Γ ： $y=9-x^2$ ，其頂點爲 A ，與 x 軸相交點爲 B 、 C 。考慮此拋物線 $y\geq 0$ 的部分，試做一直線 L 與 x 軸平行，且與此拋物線相交於 P 、 Q 兩點，連絡兩點得一凸五邊形 $APBCQ$ ，使此五邊形的面積得最大值。

解：五邊形 $APBCQ$ 的最大面積

＝2（四邊形 $AOCQ$ 的最大面積）

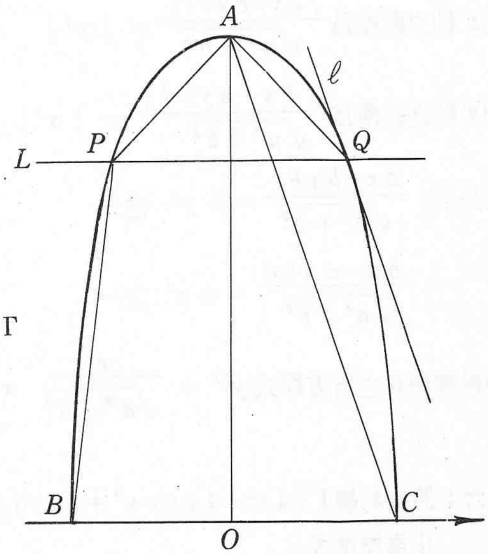
＝2（$\triangle AOC+\triangle ACQ$ 的最大面積）

現在祇要 Q 決定，$\triangle ACQ$ 即得，做－3爲斜率，平行於 AC 的一組平行弦之直徑，

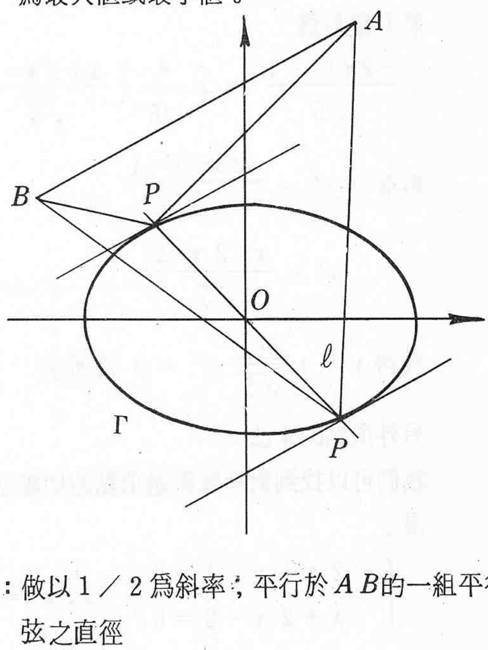
$\ell: 2x+(-3)(1)=0$

而 ℓ 與 Γ 之交點即爲 $Q(3/2,27/4)$

因此，得L：$y=27/4$



例四：在橢圓Γ：$4x^2+9y^2=36$ 上取一點$P(x,y)$與兩點$A(2,5)$，$B(-4,2)$圍成$\triangle ABP$，試決定P使$\triangle ABP$之面積爲最大值或最小值。



解：做以$1/2$爲斜率，平行於AB的一組平行弦之直徑

$$\ell:8x+\left(\frac{1}{2}\right)(18y)=0$$

而ℓ與Γ之交點。

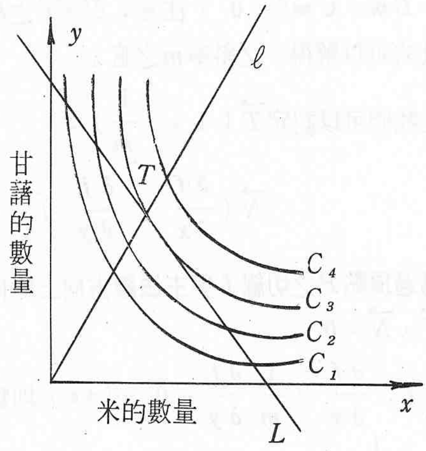
(1) $P\left(\frac{9}{5},\frac{-8}{5}\right)$使$\triangle ABP$的面積爲最大

(2) $P\left(\frac{-9}{5},\frac{8}{5}\right)$使$\triangle ABP$的面積爲最小

例五：若某人對x數量的米及y數量的甘藷，消費後其滿足感設爲$z=f(x,y)=xy$，但消費必須交付代價，今已知米每斤7.2元，甘藷每斤5.4元，知其消費者將預算432元用來買米和甘藷，問其消費米和甘藷各多少斤，可得到最大滿足感？

解：消費者在購買時受到L：$7.2x+5.4y=432$的限制，其滿足感$z=f(x,y)=xy$可在X，Y平面上做出若干條無差異曲線C_1，C_2，C_3……，而無差異曲線越向右上延伸表示滿足程度越大。

這一問題相當於要求L與無差異曲線系的切點，$T(x,y)$



自L解得$y=-\frac{3}{4}x+80$ 做以$-\frac{3}{4}$爲斜率平行於L的一組平行弦的直徑，

$$\ell:(y)+\left(-\frac{3}{4}\right)(x)=0$$

L與ℓ的交點即爲$T(30,40)$，即此人消費 30 斤米 40 斤甘藷，可得最大滿足。

三、展 望

在高中實驗教材第四冊附錄裏提到「關於二次方程式標準」中，轉軸與平移之先後問題，提到

甚多問題。比方說，對於有心錐線，平常已有方法先平移後轉軸。至於對拋物線頂點的尋求，似乎看不到有什麼書提到過………」云云。

這裏我們提出以下的方法：

只要能很快地找到拋物線的對稱軸，則一切問題皆可迎刃而解。我們的標準化動作連平移、轉軸都不需要，更不需先求頂點，就是為了其他原因要找出頂點來，也是輕而易舉的事。現在我們就仿錐線直徑的求法，來求拋物線的對稱軸。

設定：拋物線Γ：$f(x,y)=0$

$$f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$$

取平行於對稱軸ℓ的直線系ℓ'：$y=mx+k$，$k\in R$。代入Γ：$f(x,y)=0$得：

$$(A+Bm+Cm^2)x^2+(Bk+2Cmk+D+Em)x+(Ck^2+Ek+F)=0$$

此時ℓ'與Γ恰有一交點之充要條件為

$A+Bm+Cm^2=0$（注意：$\ell' /\!/ \ell$之故）

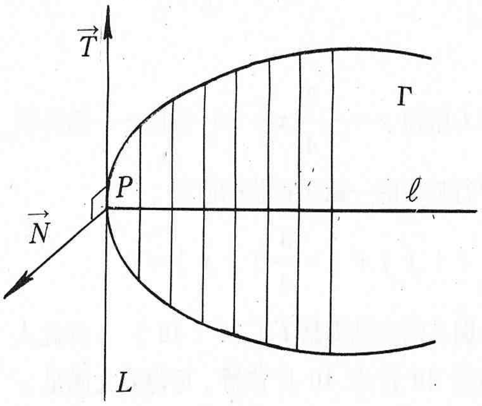
由此式可以解得ℓ之斜率m之值。

因此我們可以認定$\overrightarrow{T}\left(1,-\dfrac{1}{m}\right)$，

$$\overrightarrow{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

即為過頂點P之切線L與主法線方向上的向量，所以$\overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{N}=0$

得：ℓ：$\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ …(＊＊) 即為所求。



設ℓ：$ax+by+c=0$

繼續將Γ：$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

變形得同義方程式：

$$\left(\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\frac{e}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{bx-ay+d}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=0$$

在此同時也已求得L：$bx-ay+d=0$

由於$\ell\perp L$

因此可令ℓ為新x'軸，L為新y'軸而直角坐標平面上任意一點$P(x,y)$

到x'軸之距離為$\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=|y'|$

到y'軸之距離為$\dfrac{|bx-ay+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}=|x'|$

於是令 $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm y'$ 之一

$\dfrac{bx-ay+d}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm x'$ 之一

即得標準化之新方程式 $y'^2+\dfrac{e}{\sqrt{a^2+b^2}}x'=0$

例六：將拋物線Γ：$4x^2-4xy+y^2+8x+6y-7=0$ 化為標準式

解：求Γ的對稱軸方程式ℓ

$\because 4-4m+m^2=0 \quad \therefore m=2$

因此ℓ：$(8x-4y+8)-\dfrac{1}{2}(-4x+2y+6)=0$

即 $2x-y+1=0$

將Γ變形為

$$\left(\frac{-2x+y-1}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{x+2y-2}{\sqrt{5}}\right)=0$$

再令 $y'=\dfrac{-2x+y-1}{\sqrt{5}}$

$x'=\dfrac{x+2y-2}{\sqrt{5}}$

即得 $y'^2+\dfrac{4}{\sqrt{5}}x'=0$ 為所求

另外頂點的求法：

我們可以找到對稱軸與過頂點的切線交點即得，

$$\begin{cases}-2x+y-1=0\\ x+2y-2=0\end{cases}\qquad (x,y)=(0,1)$$

附　　記

1.研究動機

錐線直徑所在的直線方程式，在時下的高中課本

裡，求法方面都是利用錐線平行弦的中點軌跡來導出。如此整理出來的公式就有一大堆，如何能記牢呢？這還不打緊，況且又不完整（如東華本第四册，頁一五五～一六一）。至於應用方面，當然更付之闕如，又如何能瞭解它的價值呢？

2.研究過程及方法

我們利用錐線上任一點的切線與主法線方向的向量內積，求得錐線直徑所在直線方程式便捷的一般性公式。並且成功地應用它來解決廣泛的 Min-Max 問題。

3.結論與展望

我們利用錐線直徑的求法，來求拋物線的對稱軸，則拋物線一般式的標準化，也將不再是一件麻煩事了。

以上這些方法和應用，似乎尚未有什麼書提到過，我們尤希望藉此使大家更深切體會並肯定它的實用價值。

——本文作者現任教於建國中學