# 再談“階加”

陳力華

## 前言

在拙作“階加及其應用”（數季第四卷第四期）一文中，我們說明了“階加”是一個“簡單而直觀”的方法，在該文中，我們看到了以“階加”的符號在數計函數的個數時，簡單而易懂。本文爲該文之補充，以兩個方法來說明“階加”在計數“方程式解之個數”時，再次表現出他“直觀”的優點。

## 本文

例1：問 $x+y=10$ 有幾組自然數解？有幾組非負整數解？

解：① $\because x\cdot y\in N$

$\therefore x\geq 1$ 且 $y=10-x\geq 1\Rightarrow x\leq 9$

故 $x=1,2,\cdots\cdots,9$

答：有9組自然數解

② $x\geq 0$ $y=10-x\geq 0$

$\therefore 0\leq x\leq 10$ $x\in z$

故 $x=0,1,2,\cdots\cdots,9,10$

答：共有11組非負整數解

〈預備定理1〉 $x_1+x_2=n$ 有 $(n-1)$ 組自然數解。

〈預備定理2〉 $x_1+x_2=n$ 有 $(n+1)$ 組非負整數解。

以上兩個預備定理，其證明和例1的處理法大同小異。故從略。（其實，這只是“植樹問題”罷了）

例2：問 $x+y+z=10$ 有幾組自然數解？有幾組非負整數解？

解：① $z=1$ 時 $\rightarrow$ $x+y=9$ $\rightarrow$ 有8組自然數解

$z=2$ 時 $\rightarrow$ $x+y=8$ $\rightarrow$ 有7組自然數解

…………………………………………………

$z=7$ 時 $\rightarrow$ $x+y=3$ $\rightarrow$ 有2組自然數解

$z=8$ 時 $\rightarrow$ $x+y=2$ $\rightarrow$ 有1組自然數解

答：合計共 $8+7+6+\cdots\cdots+3+2+1=8\phi$ 組解。

② $z=0$ 時 $\rightarrow$ $x+y=10$ 有11組非負整數解

$z=1$ 時 $\rightarrow$ $x+y=9$ 有10組非負整數解

…………………………………………………

$z=9$ 時 $\rightarrow$ $x+y=1$ 有2組非負整數解

$z=10$ 時 $\rightarrow x+y=0$ 有1組非負整數解

答：合計共 $11+10+9+\cdots\cdots+3+2+1=11\phi$ 組非負整數解

〈定理1〉 一般而言，$x_1+x_2+x_3=n$ 有 $(n-2)\phi$ 組自然數解

有 $(n+1)\phi$ 組非負整數解

〔證略〕

例3：問 $x+y+z+w=10$ 之自然數解數，非負整數解數？

解：

①$w=1 \to x+y+z=9$ 有 $7\phi$ 組

$w=2 \to x+y+z=8$ 有 $6\phi$ 組

……………………………………………

$w=6 \to x+y+z=4$ 有 $2\phi$ 組

$w=7 \to x+y+z=3$ 有 $1\phi$ 組

答：合計共 $\sum_{k=1}^{7} k\phi = 7\phi^2$ 組自然數解

②$w=0 \to x+y+z=10 \to$ 有 $11\phi$ 組

$w=1 \to x+y+z=9 \to$ 有 $10\phi$ 組

……………………………………………………

$w=6 \to x+y+z=4 \to$ 有 $5\phi$ 組

……………………………………………………

$w=9 \to x+y+z=1 \to$ 有 $2\phi$ 組

$w=10 \to x+y+z=0 \to$ 有 $1\phi$ 組

答：合計共 $11\phi\phi$ 組

〈定理2〉 一般而言，$x_1+x_2+x_3+x_4=n$ 有 $(n-3)\overset{2}{\phi}$ 組解爲自然數

有 $(n+1)\overset{2}{\phi}$ 組解爲非負整數

〔證略〕

比較定理1，2我們猜測：

〈定理3〉 $x_1+x_2+\cdots+x_s=n$ 有 $(n-s+1)\overset{s-2}{\phi}$ 組自然數解

$(n+1)\overset{s-2}{\phi}$ 組非負整數解

$s \geq 2$

證：①$s=2$ 時 $x_1+x_2=n$ 有 $(n-1)$ 組解，由預備定理1知成立。

設 $s=k$ 時成立，ie $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=n$ 有 $(n-k+1)\overset{k-2}{\phi}$ 組解

$\to s=k+1$ 時，我們欲證 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}=n$ 有 $(n-k)\overset{k-1}{\phi}$ 組解

$x_{k+1}=1 \to x_1+x_2+\cdots+x_k=n-1$ 有 $(n-k)\overset{k-2}{\phi}$ 組解

$x_{k+1}=2 \to x_1+x_2+\cdots+x_k=n-2$ 有 $(n-k-1)\overset{k-2}{\phi}$ 組解

$x_{k+1}=3 \to x_1+x_2+\cdots+x_k=n-3$ 有 $(n-k-2)\overset{k-2}{\phi}$ 組解

……………………………………………………………………………

$x_{k+1}=n-k-1 \to x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=k+1$ 有 $2\overset{k-2}{\phi}$ 組解

$x_{k+1}=n-k \to x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=k$ 有 $1\overset{k-2}{\phi}$ 組解

共 $\sum_{i=1}^{n-k} i\overset{k-2}{\phi}=(n-k)\overset{k-1}{\phi}$ 組解由數學歸納法知得證

②$s=2$ 時 $x_1+x_2=n$ 有 $(n+1)$ 組解，由預備定理2知成立

設 $s=k$ 時成立，ie $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=n$ 設有 $(n+1)\overset{k-2}{\phi}$ 組解

$\to s=k+1$ 我們欲正 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{k+1}=n$ 有 $(n+1)\overset{k-1}{\phi}$ 組解

$x_{k+1}=0 \to x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=n$ 有 $(n+1)\overset{k-2}{\phi}$ 組解

$x_{k+1}=1 \to x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=n-1$ 有 $n\overset{k-2}{\phi}$ 組解

…………………………………………………………………………………

$x_{k+1}=n-1 \quad \rightarrow \quad x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=1$ 有 $2^{k}\overset{-2}{\phi}$ 組解

$x_{k+1}=n \qquad \rightarrow \quad x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=0$ 有 $1^{k}\overset{-2}{\phi}$ 組解

合計共 $\sum_{i=1}^{n+1} i^{k}\overset{-2}{\phi}=(n+1)^{k}\overset{-2}{\phi}$ 組解，由數學歸納法知得證

〈公式〉 ① $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_s=n$ 之自然數解數 $=(n-s+1)^{s}\overset{-2}{\phi}(n-s+1)^{s}\overset{-2}{\phi}$

$=C^{(n-s+1)+(s-2)}_{(n-s+1)-1}=C^{n-1}_{n-s}=C^{n-1}_{s-1}$

② $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_s=n$ 之非負整數解數 $=(n+1)^{s}\overset{-2}{\phi}(n+1)^{s}\overset{-2}{\phi}$

$=C^{(n+1)+(s-2)}_{(n+1)-1}=C^{n+s-1}_{n}=H^{s}_{n}$

（以上有關“ $\phi$ ”之定理請參看“階加及其應用”一文）

以下我們要利用“差分法”將上面的結論再推導一遍。

例 4：我們考慮 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的自然數解數以及非負整數解數。

(i)自然數解數爲以下各數之和

$(x_1+x_2+x_3=3$ 之自然數解數$)\times(x_4+x_5=5$ 之自然數解數$)$

$+(x_1+x_2+x_3=4$ 之自然數解數$)\times(x_4+x_5=4$ 之自然數解數$)$

$+(x_1+x_2+x_3=5$ 之自然數解數$)\times(x_4+x_5=3$ 之自然數解數$)$

$+(x_1+x_2+x_3=6$ 之自然數解數$)\times(x_4+x_5=2$ 之自然數解數$)$

(ii)非負整數解數爲下列各數之和

$(x_1+x_2+x_3=0$ 之非負整數解數$)\times(x_4+x_5=8$ 之非負整數解數$)$

$+(x_1+x_2+x_3=1$ 之非負整數解數$)\times(x_4+x_5=7$ 之非負整數解數$)$

$+(\cdots\cdots)\times(\cdots\cdots)+(\cdots\cdots)\times(\cdots\cdots)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$

$+(x_1+x_2+x_3=7$ 之非負整數解數$)\times(x_4+x_5=1$ 之非負整數解數$)$

$+(x_1+x_2+x_3=8$ 之非負整數解數$)\times(x_4+x_5=0$ 之非負整數解數$)$

如果我們用 $A^{n}_{s}$ 表示 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_s=n$ 之自然數解數

$B^{n}_{s}$ 表示 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_s=n$ 之非負整數解數

一般而言，我們有

$$A_s^{\,n}=\sum_{i=k}^{n-s+k}A_k^{\,i}\times A_{s-k}^{n-i} \qquad 1\leq k\leq s-1 \qquad B^{n}_{s}=\sum_{i=0}^{n}B_k^{\,i}\times B_{s-k}^{n-i}$$

(i) $A_s^{n}=\sum_{i=k}^{n-s+k}A_k^{i}\times A_{s-k}^{n-i} \rightarrow A_s^{n+s-1}=\sum_{i=k}^{n+k-1}A_k^{i}\cdot A_{s-k}^{n+s-i+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{取} \quad j=i-k+1\\ \rightarrow \quad i=j+k-1\end{array}\right\} \rightarrow A_s^{n+s-1}=\sum_{j=1}^{n}A_k^{j+k-1}\ A_{s-k}^{n+s-j-k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(a)若取 $k=s-1$ 　則(i)式變成 $A_s^{n+s-1}=\sum_{j=1}^{n}A_{s-1}^{j+s-2}\ A_1^{n-j+1}$

$\because A_1^{n-j+1}\equiv 1 \qquad \therefore A_s^{n+s-1}=\sum_{j=1}^{n}A_{s-1}^{j+s-2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1')$

將(1′)式與階加之定義式

$$n^{s}\overset{+\alpha}{\phi}=\sum_{j=1}^{n}j^{s}\overset{+\alpha-1}{\phi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

相互比較，注意等號兩端均爲 $n\longleftrightarrow j \quad s\longleftrightarrow s-1$ 所以我們知道

$A_s^{n+s-1}=n^{s}\overset{+\alpha}{\phi}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(i)

取 $s=2$，$n=2 \qquad A_2^{3}=2=2^{2}\overset{+\alpha}{\phi} \qquad \therefore \alpha=-2$

故 $A_s^{n+s-1}=n^{s}\overset{-2}{\phi}$

$\therefore A_s^n = (n-s+1)\overset{s-2}{\phi} = C_{n-s}^{n-1} = C_{s-1}^{n-1}$

(b)若取 $k = s-2$ 則(1)式變成 $A_s^{n+s-1} = \sum_{j=1}^{n} A_{s-2}^{j+s-3} A_2^{n-j+2}$

$= \sum_{j=1}^{n} A_{s-2}^{j+s-3}(n-j+1)$ ……(1″)

(1″)式是由預備定理一而來的，（考慮 $A_2^n = ?$）

將(1″)式與"階加及其應用"文中之定理<7>

$$n\overset{s+\alpha}{\phi} = \sum_{j=1}^{n}\left(j\overset{s+\alpha-2}{\phi}\right)(n-j+1) \cdots\cdots(3)$$

相互比較，注意等號兩端均為 $n \longleftrightarrow j$ $s \longleftrightarrow s-2$ 所以我們知道

$$A_s^{n+s-1} = n\overset{s+\alpha}{\phi} \cdots\cdots(1^\circ)$$

(ii) $B_s^n = \sum_{i=0}^{n} B_k^i B_{s-k}^{n-i} \rightarrow B_s^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} B_k^i B_{s-k}^{n-1-i}$

取 $j = i+1$

$i = j-1$ $\rightarrow B_s^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} B_k^{j-1} B_{s-k}^{n-j}$ ……<2>

(a)取 $k = s-1$，則<2>式變成

$$B_s^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} B_{s-1}^{j-1} B_1^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} B_{s-1}^{j-1} \cdots\cdots\langle 2' \rangle$$

$\because B_1^{n-j} = 1$

將<2′>式與階加之定義式<4>相互比較

注意等號兩端同為 $n \longleftrightarrow j$ $s \longleftrightarrow s-1$ 故有以下結論

$$B_s^{n-1} = n\overset{s+\alpha}{\phi} \cdots\cdots\langle 2^o \rangle$$

取 $n=3$ $s=2$ $\rightarrow B_2^2 = 3 = 3\overset{2+\alpha}{\phi}$ 故 $\alpha = -2$

$\therefore B_s^{n-1} = n\overset{s-2}{\phi}$

$\rightarrow B_s^n = (n+1)\overset{s-2}{\phi} = C_n^{n+s-1} = H_n^s$

(b)取 $k = s-2$

$$B_s^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} B_{s-2}^{j-1} B_2^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} B_{s-2}^{j-1}(n-j+1) \cdots\cdots\langle 2'' \rangle$$

由預備定理 2 知 $B_2^n = n+1$

比較<2″>與(3)式，注意等號兩端同為 $n \longleftrightarrow j$ $s \longleftrightarrow s-2$

故 $B_s^{n-1} = n\overset{s+\alpha}{\phi}$ ……<2°>

練習：(i)由<2>及<2°>證明下式

$$n\overset{r}{\phi} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j\overset{r-3}{\phi}(n-j+1)(n-j+2)$$

（提示：令 $k = s-3$）

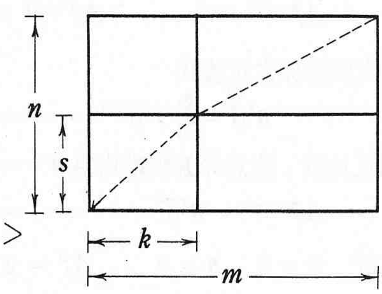
(ii)寬 $m$ 格，高 $n$ 格的棋盤式街道，從左下角至右上角有幾種走法？

（參考數季徵答題 5101 的解 2）

甲說：寬 $m$ 格，高 $n$ 格的棋盤街道，其正規走法（不能向右及向下）設為 $\theta(m, n)$ 個則很容易得到下式：（參考圖<甲>）

$$\theta(m, n) = \sum_{s=0}^{n} \theta(k, s) \times \theta(m-k, n-s) \cdots\cdots\langle A \rangle$$

$\forall\, 0 \leq k \leq m$




<甲>

若取　$k=m-1$　則上式可化簡成

$$\theta(m,n)=\sum_{s=0}^{n}\theta(m-1,s)\times\theta(1,n-s)$$
$$=\sum_{s=0}^{n}\theta(m-1,s)\times(n-s+1)$$

利用差分法（如前所述）即可解出

乙說：不對！不對！＜$A$＞式應爲

$$\theta(m,n)=\sum_{s=0}^{n}\theta(k,s)\times\theta(m-k-1,n-s)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots<B>$$

$$\forall\ 0\leq k\leq m$$

取　$k=m-1$　則上式可化簡爲

$$\theta(m,n)=\sum_{s=0}^{n}\theta(m-1,s)\times\theta(0,n-s)$$
$$=\sum_{s=0}^{n}\theta(m-1,s)$$

利用差分法即可求得

到底甲對還是乙對呢？又是爲什麼呢？

答：乙對

## 後　語

“階加及其應用”一文刊出後，有朋友問我：

「那個定理」和函數個數沒有關係嘛！用他來降階求值也遠不如用定理6來得快，那麼定理7還有什麼用處？」因此在本文中，我們利用一點定理7的結果顯示他在處理問題上有著和定義式一樣的簡潔。

不定方程式自然數解（或非負整數解）之個數問題，本文僅討論方程式形如 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_3=n$ 者至於 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_sx_s=n$ 形式者，則尚待大家共同去研究了。

本文作者就讀於海洋學院造船工程學系三年級