討論類

配對問題

葉東進

中小學生的社會科試卷上常會出現一些配對題：一邊是十個國家的名字，另一邊是十個首都的名字，要同學分別把十個國家用線連接她對應的首都。或者某一位秘書打好了不同的六張信與六個不同收信人的信封，之後要把信裝入正確的信封內。沒有人會傻到把一個國家連上兩個首都。當然，把兩封信裝入同一信封內的人也不配當秘書。這就是配對問題。用數學的術語來說便是：元素一樣多的兩個有限集合之間的一對一的對應。問題是，雖然連上了十條線，不見得就把國家與首都的名字作了完全正確的對應，正如同秘書要是不經心的話，很可能發生不可原諒的張冠李戴。

現在讓我提出一個很有意思的問題：假定某一位不知用功的學生在毫無準備的情況下，心存僥倖胡亂地畫上十條線作一番猜測，平均他會猜中幾題？或是一位花瓶秘書，就那麼不經心地隨意將一張一張的信裝入一個一個的信封內，平均她會裝對幾封？

假使我告訴你說這兩個問題的答案都是1時，你會否感到驚奇？更驚奇的是：不論配對題的題數是10，20或是 n，其中的 n 是你可能想到的任何正整數，平均猜對的題數總是1。裝信的情形當然也是一樣。爲什麼會這樣呢？底下會給這件事來個證明，證明之前讓我們注意到事情裡面涉及到「平均」這個觀念。什麼是「平均」？

平　　均

現代社會裏，我們常常接觸到「平均」這兩個字，譬如國民平均所得，班上月考的平均成績或者老師在結算同學的學期成績也常用到「平均」。

一般所指的平均是算術平均。譬如小蓉，小豐，小邦三人各有180，76，11元，三人平均有 $\dfrac{180+76+11}{3}=89$ 元。但是錢在各人口袋裡，89這數字會有什麼意義呢？換個說法看看，譬如有一個扒手，他看到小蓉，小豐，小邦在一塊聊天，假定他原先沒有確定下手的對象，也就是說三個人中的每一個被扒的機會一樣，都是⅓，當然扒手事先並不知道三人的口袋裡各有多少錢。現在要問：當他向其中一人下手後，平均他會扒到多少錢呢？也許你心裡想該是 89 吧？怎麼得來的？這樣算：

$$180\times\frac{1}{3}+76\times\frac{1}{3}+11\times\frac{1}{3}=89 \qquad \left(\frac{180+76+11}{3}=89\right)$$

再舉一例：某次測驗，某班 39 人的成績分佈如下：

分　數	40	50	60	70	80	90
人　數	6	10	12	7	3	1

問平均分數？

你的答案會是：

$$\text{平均分數}=\frac{\text{總分}}{\text{人數}}=\frac{40\times6+50\times10+60\times12+70\times7+80\times3+90\times1}{39}$$

$$=\frac{2280}{39}=59.5$$

將上面的式子改寫得到：

$$平均分數 = 40\times\frac{6}{39}+50\times\frac{10}{39}+60\times\frac{12}{39}+70\times\frac{7}{39}+80\times\frac{3}{39}+90\times\frac{1}{39}$$

$$= 59.5$$

這樣子的改寫，究竟表示什麼意義呢？看看：

班上 39 人中，如果隨意抽出一個，他的分數恰是 40 ，這樣的機會有多大？你會同意是6／39 。

同樣的，隨意抽出一個，他是考 80 分的，機會應是3／39。經由這般的解說，我們可以瞭解，「平均」是含有「機會」的觀念在裡頭。

通過以上的認識，現在回頭看看原先的配對問題。

在回答“平均會猜中幾題”之前，必須先考慮猜中的題數的可能情形，譬如可能一題也沒猜中，可能猜中1題，2 題或是3 題，……，8 題，甚或10題全部猜中（注意：不會有猜中9題的情形），因此，平均猜中的題數應等於：

0 ×（一題也沒猜中的機會）+ 1 ×（猜中1 題的機會）+ 2 ×（猜中2 題的機會）+…………+ 8 ×（猜中8 題的機會）+ 10 ×（猜中 10 題的機會）

為了方便，設計如下的符號：

令X表猜中的題數，所以X是一個變數（通常稱為隨機變數），它可以表示0，1，2，3，4，5，6，7，8，10 的任一個。

又令$f(X)$ 表示猜中的題數是X的機會，譬如$f(0)$ 就是全沒猜中的機會，$f(1)$ 是猜中1題的機會，……，$f(10)$是 10 題全部猜中的機會。

因此，平均猜中的題數$= 0\times f(0)+1\times f(1)+2\times f(2)+\cdots\cdots+8\times f(8)+10\times f(10)$

$$= \sum_{x=0,\ x\neq 9}^{10} X\cdot f(X)$$

一般說來，題數為n的配對題中，平均猜中的題數便是

$$\sum_{x=0,\ x\neq n-1}^{n} X\cdot f(X)$$

現在該來算算$f(X)$了，譬如要計算$f(10)$便是要算出十題全部猜中的機會，這要怎麼算呢？

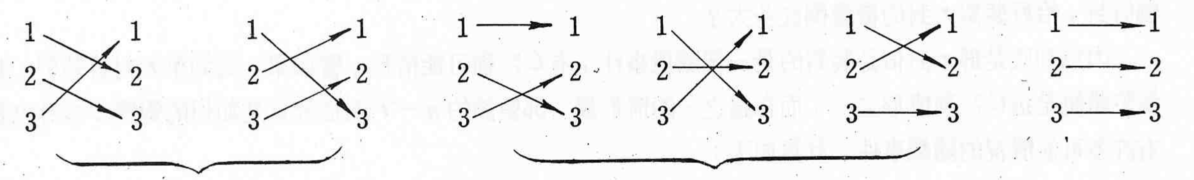
f(X)的計算

譬如說二張不同的信裝入二個不同的信封，方法共有2 種，其中二封信皆裝對的情形只有一種，二封均裝錯的情形也是一種，因此，這時$f(2) = 1/2$ ，而$f(0)$ 也是$1/2$ 。所以平均裝對的信數

$$= 0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=1$$

把數目改為三，這時，三張信裝入三個信封的情形共有6 種：

(信) (信封) (信) (信封) (信) (信封) (信) (信封) (信) (信封) (信) (信封)



（三封皆裝錯） （一封裝對） （三封皆裝對）

可以看出$f(0)=\dfrac{2}{6}$ ，$f(1)=\dfrac{3}{6}$ ，$f(3)=\dfrac{1}{6}$

因此，平均裝對的信數 $= 0 \times \frac{2}{6} + 1 \times \frac{3}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = 1$

現在來處理當 X 是很大時的 $f(X)$ 的一般計算。無妨令 $X = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, n-2, n$ 處理過程中會用到底下一個定理，因此先略作介紹

相容——排斥原理

計算集合的元素的個數時，大家常用到這個式子：

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$　，其中 $|A|$ 表 A 的元素的個數，餘同。

這就是相容——排斥原理。但是一般計算時，我們用到的是它的推廣：

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

或是
$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n| = {} & |A_1| + |A_2| + \cdots\cdots + |A_n| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots\cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n| \end{aligned}$$

這個原理常被用在解決當至少有一個條件滿足或是諸多條件均被否定的情況時。譬如四張信裝入四個信封時共有 24（4！）種情形。其中四封皆裝錯（注意：假定把每一張信正確地裝入相對的信封看作是一個條件，那麼四封信都裝錯便是四個條件均被否定）的情形共有多少種？要是按先前列圖的方式來計算恐怕很麻煩，這時相容——排斥原理便派得上用場：

由於 $|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$

其中 $|S|$ 表示 $24 =$ 裝信的所有情形的總數，A_i' 是 A_i 的否定，因而

$|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'|$ 便表示四封信皆裝錯的情形的總數。

因為
$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots\cdots \\ &\quad + \cdots\cdots - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4 \times 3! - 6 \times 2! + 4 \times 1! - 1 = 15 \end{aligned}$$

而有 $f(0) = \frac{9}{24}$

同樣，可以算出 $f(1) = \frac{8}{24}$，$f(2) = \frac{6}{24}$，$f(4) = \frac{1}{24}$

因此，平均裝對的信數 $= 0 \times \frac{9}{24} + 1 \times \frac{8}{24} + 2 \times \frac{6}{24} + 4 \times \frac{1}{24} = 1$

有了前面的處理經驗作基礎，現在來求 $f(X)$。

譬如當 $X = r$，其中 $0 \leq r \leq n$，$r \neq n-1$，r 是整數，我們所要計算的便是，如果 n 張信裝入 n 個信封，恰好裝對 r 封的機會倒底多大？

因為到底是那 r 封信是裝對的是一個隨機事件，有 C^n_r 種可能情形，譬如第一封到第 r 封皆裝對，其餘裝錯便是這 C^n_r 種情形之一，而在這之一的情形裏，那裝錯的 $n-r$ 封信究竟是如何的對應，本身也是有許多可能情況的隨機事件，計算如下：

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{（信）} & 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & r & r+1 & r+2 \ \cdots\cdots \ n \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{（信封）} & 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & r & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{r+1 \quad r+2 \ \cdots\cdots \ n}_{(n-r\text{ 封皆裝錯})}} \end{array}$$

利用相容——排斥原理算出這 $n-r$ 個皆裝錯的對應情形共有：

$$(n-r)!-[C_1^{n-r}\cdot(n-r-1)!-C_2^{n-r}\cdot(n-r-2)!+\cdots\cdots-(-1)^{n-r}C_{n-r}^{n-r}]$$

$$=(n-r)!-(n-r)![1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots\cdots-(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!}]$$

$$=(n-r)!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!})$$

因此，恰好裝對 r 封信的情形，其總數是

$$C_r^n\cdot(n-r)!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!})$$

由此，而知 $f(r)=C_r^n\cdot(n-r)!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!})/n!$

$$=\frac{1}{r!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!})$$

（注意：$f(n)=\dfrac{1}{n!}$）

有了上面的式子，便可輕易地計算 $f(X)$ 了。

譬如六張信裝入六個信封的情形：

$$f(0)=\frac{1}{0!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!})=\frac{265}{720}$$

$$f(1)=\frac{1}{1!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})=\frac{264}{720}$$

$$f(2)=\frac{1}{2!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})=\frac{135}{720}$$

$$f(3)=\frac{1}{3!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})=\frac{40}{720}$$

$$f(4)=\frac{1}{4!}(\frac{1}{2!})=\frac{15}{720}$$

$$f(6)=\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}$$

因此，平均裝對的信數 $=0\times\dfrac{265}{720}+1\times\dfrac{264}{720}+2\times\dfrac{135}{720}+3\times\dfrac{40}{720}+4\times\dfrac{15}{720}+6\times\dfrac{1}{720}=1$

前面我們看到的一些例子，都顯示了同樣的結果：平均數爲 1 。

底下便要給出一個「平均數爲 1 」的一般性的證明 。證明是用數學歸納法；另外也用到如下的式子：

$$C_2^k-C_3^k+C_4^k-\cdots\cdots\cdots+(-1)^k\cdot C_k^k=k-1$$

這個式子的證明其實很簡單，但是仍把它放在附註裡，免得中斷了閱讀情緒 。

平均數等於 1

證明：當 $n=1$ 時，也就是說一張信裝入一個信封，無疑的，此時當然是裝對了一封 。

設 $n=k$ 時，平均數等於1，即：

$$0\times f(0)+1\times f(1)+2\times f(2)+\cdots\cdots+(k-2)\times f(k-2)+k\times f(k)=1$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow\quad & 1\times\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}\right)\\ &+2\times\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{k-2}\frac{1}{(k-2)!}\right)\\ &+\cdots\cdots\cdots+(k-2)\times\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{1}{2!}\right)+k\times\frac{1}{k!}=1\end{aligned}$$

當 $n=k+1$ 時，由平均數的意義知：

平均數 $=0\times f(0)+1\times f(1)+2\times f(2)+\cdots\cdots+(k-1)\times f(k-1)+(k+1)\times f(k+1)$

$$\begin{aligned}&=1\times\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{k}\cdot\frac{1}{k!}\right)\\ &\quad+2\times\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{(k-1)!}\right)\\ &\quad+\cdots\cdots+(k-2)\times\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)\\ &\quad+(k-1)\times\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{2!}\right)+(k+1)\times\frac{1}{(k+1)!}\\ &=\Big[1\times\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}\right)\\ &\quad+2\times\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{k-2}\frac{1}{(k-2)!}\right)\\ &\quad+\cdots\cdots+(k-2)\times\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{1}{2!}\right)+k\times\frac{1}{k!}\Big]\\ &\quad-k\times\frac{1}{k!}+(k+1)\times\frac{1}{(k+1)!}\\ &\quad+\underbrace{\left[(k-1)\times\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{2!}\right)-(k-2)\times\frac{1}{(k-2)!}\times\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{k}\times\frac{1}{k!}\right]}_{(*)}\\ &=1-k\times\frac{1}{k!}+(k+1)\times\frac{1}{(k+1)!}+(*)\end{aligned}$$

其中的 $(*)$ 可再化簡爲：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(k-2)!}\times\frac{1}{2!}-\frac{1}{(k-3)!}\times\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{k}\times\frac{1}{k!}\\ &=\frac{1}{k!}\left[\frac{k!}{(k-2)!\,2!}-\frac{k!}{(k-3)!\,3!}+\cdots\cdots+(-1)^{k}\times\frac{k!}{k!}\right]\\ &=\frac{1}{k!}\left[C^{k}_{2}-C^{k}_{3}+\cdots\cdots+(-1)^{k}C^{k}_{k}\right]=\frac{k-1}{k!}\end{aligned}$$

因此，平均數 $=1-\frac{k}{k!}+\frac{k+1}{(k+1)!}+\frac{k-1}{k!}=1$

即當 $n=k+1$ 時亦得平均數等於1，證畢。

後　記

上面的證明，確定了平均數爲1的不移眞理，但是多少仍有些疑問，尤其是一個小偸，假定拿了6把鑰匙去開啓6個裝了鎖的抽屜，規定一個鎖只能用一把鑰匙開啓，照上面的說法，平均他只能開對一個抽屜；也許你會跟這位小偸一樣起懷疑：要是換成 10 把鑰匙 10 把鎖，開對的不是應該多些才對嗎？但是上面的證明竟然是顚樸不破的告訴我們，旣使是換成100把鑰匙100把鎖，平均開對的也只是一把，這樣的結論是不是跟我們的直覺有些距離？底下的說法你同不同意：

當鑰匙與鎖的數目增多時，開對的鎖固然可能增多，但是開錯的鎖也是相對的增加，所以平均起來仍然是…………

必竟，我們一般人常犯有這樣的毛病：只看到正面的情況不斷的遞增，卻忽略了負面的情況也跟着相對的增加；正如同文明的發展，由於愚昧，只是見到那易見的一面不斷的成長進步，卻沒有看清那不易見的一面不斷的消失退化。

如果，配對問題的平均數爲1這件事能引起對上面那段話的共鳴，這倒是很有意思的。

註：　由二項展開式：$(x+1)^k = C_0^k + C_1^k x + C_2^k x^2 + \cdots\cdots + C_k^k x^k$

令 $x=-1$　　得　$0 = C_0^k - C_1^k + C_2^k - \cdots\cdots + (-1)^k C_k^k$

$\therefore\ C_2^k - C_3^k + \cdots\cdots + (-1)^k C_k^k = k-1$

—— 本文作者現任教於台中曉明女中