問題類

本期演練試題

談高中生如何學習數學

羅 添 壽

筆者常接到一些同學們的來信，談到他（她）們在學習數學上的困擾。例，有些學生說坊間參考書幾乎每題皆看過，考試就是考不好，也有已經參加了課外輔導，然還是不見起色，……如此一問，給予筆者很多的感觸，即目前學生們對學習數學的態度，不是“放棄”，就是“囫圇吞棗，不求甚解”，對題目來者不拒而囫圇吞棗，對定理公式不加思索，不求甚解，於是對所習的定義定理，無法建立整體的概念，因此既不能認清其原理原則，又無法訓練正確的思考方式去了解作題目的眞正意義與價值，而對準備數學時常事倍功半，慘哉！筆者有鑒於此，提供一些如何研習數學的方法，供同學們參考：

〈I〉 熟記原理原則

國有國法，家有家規，違犯這些法則就是錯誤，學習數學亦不例外，解題時必需依照原理原則靈活應用之，不依此，則解題過程，困難重重，當然解題時，要時常去思考，分析，爲何要如此做，以增進了解其道理，今筆者先以“高斯符號”舉例說明之。

高斯符號之性質

① 設〔 〕表高斯符號，則

〔x〕表不大於x之最大整數 （同學們看到此定義，該熟記高斯符號x是對整數而言）

② $[x]=n \Rightarrow n\leq x<n+1,\quad n\in Z$

定理一 設 $m,n\in Z$，且 $m\leq[x]\leq n$ 則 $m\leq x<n+1$，證之。

證 依題意知 $[x]=m,m+1,m+2,\cdots\cdots m+k,\cdots\cdots n$，

其中 $k=0,1,2\cdots\cdots(n-m)$，

討論 (1) 當 $[x]=m \Rightarrow m\leq x<m+1$，或

(2) 當 $[x]=m+1 \Rightarrow m+1\leq x<m+2$

…………………………………………………………

當 $[x]=n \Rightarrow n\leq x<n+1$

將上諸不等式聯集知 $m\leq x<n+1$得證。

《例1》 設$x\in R$，求解高斯不等式$7/3\leq[2x+3]<29/3$

解：$\because$ $[2x+3]\in Z$ $\therefore$ $3\leq[2x+3]\leq 9$ （學生們依照定理一之證法，一一列出亦可）

由定理一知 $3\leq 2x+3<10 \Rightarrow 0\leq x<\dfrac{7}{2}$ 爲所求

《例 2》 求解高斯不等式 $|[2x+3.5]-1|\leq 10$

解：∵ $-10\leq [2x+3.5]-1\leq 10$

$\Rightarrow -9\leq [2x+3.5]\leq 11 \Rightarrow -9\leq 2x+3.5<12$ 由定理一知

$\Rightarrow -12.5\leq 2x<8.5 \Rightarrow -6.25\leq x<4.25$ 爲所求

〈類〉 求解下列各高斯不等式。

① $-3<[1-x]\leq 4$ ② $-3\leq [1-x]<4$ ③ $-3<[1-x]<4$

④ $-3\leq [1-x]\leq 4$ ⑤ $1<[|2x-3|]\leq 3$

答：① $-4<x\leq 3$ ② $-3<x\leq 4$ ③ $-3<x\leq 3$

④ $-4<x\leq 4$ ⑤ $\frac{5}{2}\leq x<\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<x\leq\frac{1}{2}$

定理二 設 $x\in R$，則 $0\leq x-[x]<1$ 證明之。

證：令 $[x]=n \Rightarrow n\leq x<n+1 \Rightarrow 0\leq x-n<1$

$\Rightarrow 0\leq x-[x]<1$ （∵ $n=[x]$）

《例 3》 $x\in R$，$\sqrt{x-[x]}+x=2$ 求解之。

解：由定理二知 $0\leq x-[x]<1 \Rightarrow 0\leq\sqrt{x-[x]}<1$

代入原式，得 $0\leq 2-x<1 \Rightarrow 1<x\leq 2 \Rightarrow [x]=1$ 或 2

① 當 $[x]=1$ 即 $1\leq x<2$ 時，原式爲 $\sqrt{x-1}+x=2$

$\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ （但 $1<x<2$ ∵ $x=1$ 不合）

$$\therefore\ x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

② 當 $[x]=2$ 即 $2\leq x<3$ 時，原式爲 $\sqrt{x-2}+x=2$

$\therefore\ x=2$ $\therefore\ \{2,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\}$ 爲所求

我們現回顧（70）年大學聯考試題。

註：原題是選擇題，筆者將它改爲計算題如下：

《例 4》 （甲丙組）<丁>大題

試解聯立方程組 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ yz-zx+xy=7 \\ -yz-zx+xy=47 \end{cases}$

① 共有幾組解？（重根不要重複計算）

② 共有幾組實解？

③ 從實數解中，挑出 x 最大的那一組，如果不只一組，再從其中挑出 y 最大的，若還不只一組，就再挑 z 較大的；必要時，四捨五入，如此得一組解（x，y，z）求 x，y，z。

〈分析〉 平常吾人求解 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 相信每位同學皆能得 $x=2$，$y=-1$。然少有同學們去思

考其計算過程，即將二未知數變成一個未知數，若能想到，則本大題該會做才對，只要將三未知數 x，y，z 變成一個即可，平常解題就是要注意此法則。

解：
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 & \cdots\cdots\text{①} \\ yz-zx+xy=7 & \cdots\cdots\text{②} \\ -yz-zx+xy=47 & \cdots\cdots\text{③} \end{cases}$$

②－③ $\Rightarrow$ $2yz=-40$ ……④

$\dfrac{②+③}{2}$ $\Rightarrow$ $x(y-z)=27$ ……⑤

$⑤^2$ $\Rightarrow$ $x^2(y^2-2yz+z^2)=729$ ……⑥

①，④代入⑥ $\Rightarrow$ $x^4-90x^2+729=0 \Rightarrow (x^2-81)(x^2-9)=0$

$\Rightarrow$ $x^2=81$ 或 $x^2=9$

就 x 討論之。

(1) 當 $x=9$ 時，代入⑤與④聯立

$$\begin{cases} y-z=3 \\ yz=-20 \end{cases} \Rightarrow y^2-3y+20=0 \quad \because \triangle<0 \quad \therefore$$ y 為複數根

$\therefore$ (x, y, z) 為複數根且有 2 組

(2) 當 $x=-9$ 時，代入⑤與④聯立

$$\begin{cases} y-z=-3 \\ yz=-20 \end{cases} \Rightarrow y^2+3y+20=0 \quad \because \triangle<0 \quad \therefore$$ y 為複數根

$\therefore$ (x, y, z) 為複數根且有 2 組

(3) 當 $x=3$ 時，代入⑤與④聯立

$$\begin{cases} y-z=9 \\ yz=-20 \end{cases} \Rightarrow y^2-9y+20=0 \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=-5 \end{cases} \text{或} \begin{cases} y=5 \\ z=-4 \end{cases}$$

(4) 當 $x=-3$ 時，代入⑤與④聯立

$$\begin{cases} y-z=-9 \\ yz=-20 \end{cases} \Rightarrow y^2+9y+20=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-4 \\ z=5 \end{cases} \text{或} \begin{cases} y=-5 \\ z=4 \end{cases}$$

依題意知

① 共有 8 組解　② 共 4 組實解　③ $(3, 5, -4)$ 為所求

〈類〉① （70）年聯考乙丁組<丁>大題

試解 $\begin{cases} x+xy=35 \\ y+xy=32 \end{cases}$

② （70）年聯考甲丙組<丙>大題

已知 $x+3y+5z=0$ 且 $2x+4y+7z=0$ 試把

$\dfrac{3x^2-4y^2+4z^2-2yz-4zx+5xy}{2x^2+4y^2+4z^2}$ 化為最簡分數 $\dfrac{q}{p}$，

提示 將未知數 x，y，z 改成一個

③ （70）年聯考乙丁組<丙>大題

已知 $x+3y+5z=0$ 且 $2x+4y+7z=0$，試把

$\dfrac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+4z^2}$ 化為既約分數 $\dfrac{q}{p}$

答 ① $(-5, -8)$，$(7, 4)$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{8}{9}$

《例 5》（70年）（甲丙組己大題）（乙丁組己大題）

假設 $f(x)=6x^4-29x^3+26x^2+14x-12$ 我們要解方程式 $f(x)=0$，先試求有理根：① 已知 $f(x)=0$ 在開區間 $(-1\ -\frac{1}{3})$ 內有一個有理根，$-\frac{p}{q}$（既約分數）求 p，q

② 已知 $f(x)=0$ 在開區間 $(1,2)$ 內有一有理根 $\frac{s}{r}$（既約分數），求 r，s

③ $f(x)=0$ 另有兩個根，其較大者為 $l+\frac{m}{10}$（取兩位有效數字），求 l，m

其中 p，q，r，s，l，m 為 0，1，2……，9 之整數

〈分析〉 此題必需熟記"一次因式檢驗法及其推廣"

一次因式檢驗法

定理 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$

若 $x=\frac{b}{a}$ 是 $f(x)=0$ 之有理根，則 $a\mid a_n$ 且 $b\mid a_0$，其中 a，b 互質。

推論：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$

若 $x=\frac{b}{a}$ 是 $f(x)=0$ 之一有理根，則 $(a+b)\mid f(-1)$ 且 $(a-b)\mid f(1)$

解 ∵ $f(x)=6x^4-29x^3+26x^2+14x-12$。令 $x=b/a$ 為其有理根，則 $a=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$。且 $b=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$。

① ∵ $x\in(-1,-\frac{1}{3})$，∴ x 可能根為 $-\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{3}$，

由綜合除法知 $f(\frac{1}{2})\neq0$，且 $f(-\frac{2}{3})=0$ ∴ $p=3$，$q=2$

② ∵ $x\in(1,2)$，∴ x 之可能根為 $\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$

又 $f(\frac{4}{3})\neq0$，且 $f(\frac{3}{2})=0$ ∴ $r=2$，$s=3$

③ ∵ $f(x)=(3x+2)(2x-3)\cdot q(x)$

∴ $f(x)=(6x^2-5x-6)\cdot q(x)$

∴ $q(x)=x^2-4x+2$

令 $q(x)=0\ \Rightarrow\ x=2\pm\sqrt{2}$，∴ $x=2+\sqrt{2}=2+1.414=3.414$

∴ $x=3+\frac{4}{10}$ ∴ $l=3$，$m=4$

註 若此題改為求解 $f(x)=6x^4-29x^3+26x^2+14x-12=0$ 之有理根，則必需借用"分析"所談的兩個定理，由學生自習。

〈Ⅱ〉 由簡入深，作有系統的推廣

學生們研習數學的最大錯誤就是不敢深入研究，徹底了解，總是要在最短時間，看很多題目，不求甚解，以致效果不彰，造成對數學有恐懼感，故筆者希望同學們能由簡入深，徹底了解之，今筆者以（69.）年大學聯考試題說明之。

《例6》（69.年大學聯考）

① 試作 $|x|+|y|=3$ 之圖形，並求面積。

② 應用①之結果作 $|x-1|+|y-1|=3$ 之圖形，並求其面積。

③ 再應用②試作 $||x|-1|+||y|-1|=3$ 之圖形，並求其面積。

④ 再應用③試作 $||x-2|-1|+||y-2|-1|=3$ 之圖形爲幾邊形，並求其面積。

（69年乙丁組）

⑤ 再應用④試作 $|||x|-2||-1|+|||y|-2|-1|=3$ 之圖形爲幾邊形，並求其面積。

（69年甲丙組）

〈分析〉 此題必需先了解

$\dfrac{|x|}{a}+\dfrac{|y|}{b}=1$，$a>0$，$b>0$ 之性質，（配合對稱，讀者自習）

① 當 $a=b$ 則表正方形，面積爲 $2ab$

② 當 $a\neq b$ 則表菱形，面積爲 $2ab$

由上之分析知 $\dfrac{|x|}{a}+\dfrac{|y|}{b}=1$，表以（0，0）爲中心之正方形或菱形。

解：① $|x|+|y|=3$

當 $x\geq 0$，$y\geq 0$ $\Rightarrow$ $x+y=3$ 如圖(一)

由對稱知對 x 軸，y 軸，原點，$x=y$，$x=-y$ 皆對稱。

面積爲

$$2\times 3\times 3=18$$

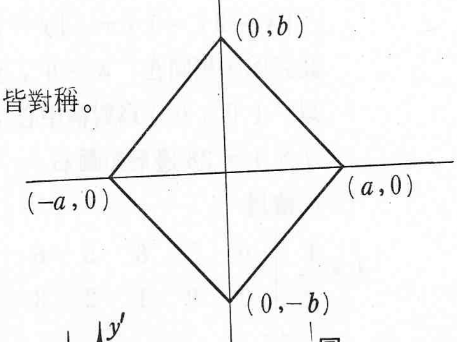


圖 一

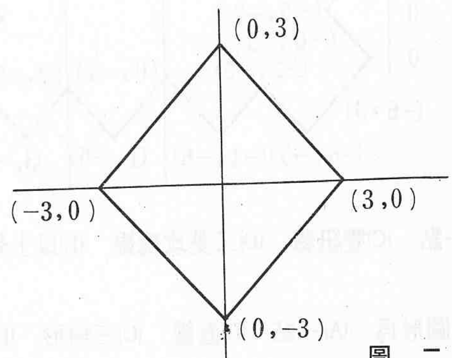


圖 二

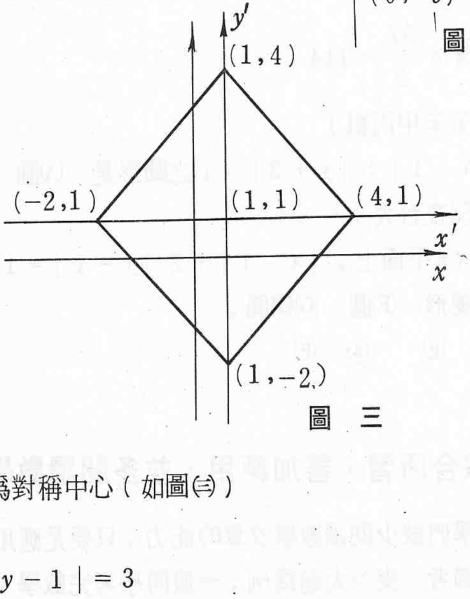


圖 三

② $|x-1|+|y-1|=3$

令 $\begin{cases}x'=x-1\\ y'=y-1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=x'+1\\ y=y'+1\end{cases}$

由平移之性質知所求爲表以（1，1）爲對稱中心（如圖(三)）

③ $||x|-1|+||y|-1|=3$

當 $x\geq 0$，$y\geq 0$ $\Rightarrow$ $|x-1|+|y-1|=3$

由②再配合此題對原點成對稱得圖形如圖(四)共爲12邊形。

面積 $4\times a\square ABCD$

$$=4\times\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&3&4&1&0&0\\0&0&1&4&3&0\end{vmatrix}=2\times|3+16+3-1|=42$$

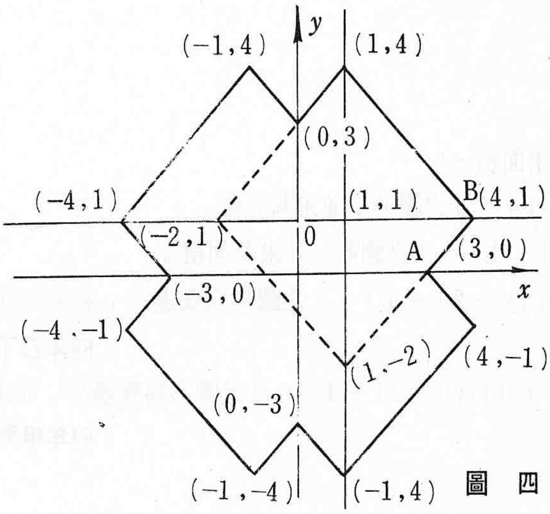


圖 四

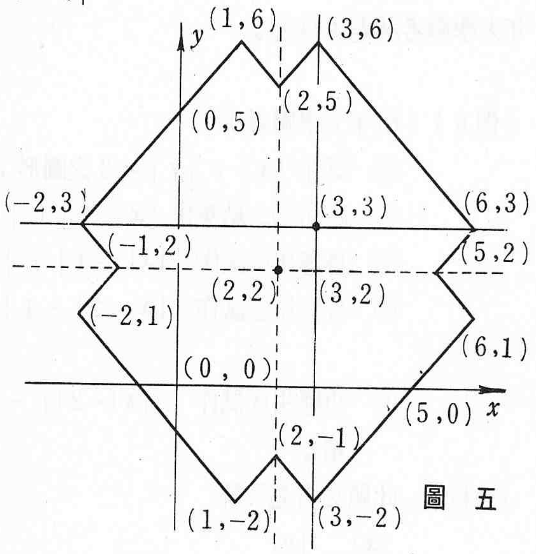


圖 五

④ $||x-2|-1|+||y-2|-1|=3$

令 $\begin{cases}x-2=x'\\y-2=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'+2\\y=y'+2\end{cases}$ 表以 （2，2）爲平移中心，由③知 $||x'|-1|+||y'|-1|=3$ 表以（2，2）爲對稱中心的12邊形區域且面積爲 42 （如圖(五)）

⑤ $|||x|-2|-1|+|||y|-2|-1|=3$

當 $x\geq 0$，$y\geq 0$ 時，原式爲

$||x-2|-1|+||y-2|-1|=3$

此式與④相同在 $x\geq 0$，$y\geq 0$ 條件下，

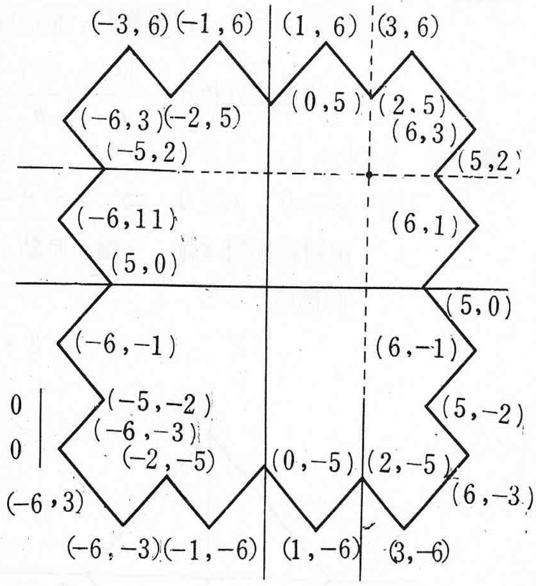
以 （0，0）爲對稱中心，得

$7\times 4=28$ 邊形如圖右

面積爲

$$4\times\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&5&6&5&6&3&2&1&0&0\\0&0&1&2&3&6&5&6&5&0\end{vmatrix}$$

$$=4\times\frac{57}{2}=114$$



〈類〉① （56年甲丙組）

$|x-1|+|y+3|=1$ 之圖形是 (A)圓 (B)一點 (C)雙紐線 (D)三葉玫瑰線 (E)以上皆非。

② （58夜台大）

在 xy 平面上，$|x-1|+2|y-1|=1$ 所表圖形爲 (A)一點 (B)直線 (C)三角形 (D)矩形 (E)菱形 (F)圓 (G)橢圓。

答 ① (E) ② (E)

〈Ⅲ〉 綜合所習，善加應用，並多閱讀數學文章

目前同學們缺少閱讀數學文章的能力，只要是應用方面的試題，視之爲拐奕之題目，而不敢領敎，今以（70.）年聯考＜庚＞大題爲例，一般同學考完數學，皆異口同聲說＜庚＞大題因考了“生物”，看到“

細胞”就無心往下看了，哀哉，此題共 21 分，如此怎能考得好呢？今將此題分析如下。

《例 7》 （70.年聯考“庚”大題）

在平面R^2上取定了一個直角坐標系，令$S=\{(x,y):\sin^2x+\sin^2y=1\}$爲$\sin^2x+\sin^2y=1$之圖形，集合$R^2-S$被$S$分隔成一塊塊，每一塊叫做一個“細胞”，細胞之形狀爲何？面積多少？

①每個細胞的形狀是（　　　）。

②每個細胞之面積近似值爲（　　　）（取一位有效數字）。

有多少個細胞含在圓盤$\{(x,y):x^2+y^2\leq r^2\}$中呢？

答案記做$N(r)$；

③先求 $N(1)=($　　　$)$　　④再求 $N(2)=($　　　$)$

⑤再求 $N(5)=($　　　$)$　　⑤再求 $N(8)=($　　　$)$

如果半徑r越來越大，那麼$\dfrac{N(r)}{r^\alpha}$會趨近一個實數$\beta>0$，求α，β。

⑦$\alpha=($　　　$)$　　⑧$\beta=($　　　$)$

〈分析〉 此題不但考了閱讀能力，還測驗學生的三角函數，圓與直線之關係，還有如何應用至極限，是一題非常漂亮的綜合性試題，可測驗出學生眞正的程度，然必泿費一點時間去整理它。

解：$\because$ $\sin^2x+\sin^2y=1$，　$\therefore$ $\sin^2x=1-\sin^2y=\cos^2y$　　$\therefore$ $\sin x=\pm\cos y$

(1) 當 $\sin x=\cos y$

$$\Rightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$$

$$\Rightarrow x=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-y\right),\ n\in Z$$

$$n=0 \Rightarrow x+y=\frac{\pi}{2}$$

$$n=1 \Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$n=-1 \Rightarrow x-y=-\frac{3}{2}\pi$$

$$n=2 \Rightarrow x+y=\frac{5}{2}\pi$$

$$n=-2 \Rightarrow x+y=-\frac{3}{2}\pi$$

…………………………………………

(2) 當 $\sin x=-\cos y$ 時

$$\Rightarrow \sin x=\sin\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)$$

$$\Rightarrow x=n\pi+(-1)^n\left(\frac{3}{2}\pi-y\right),\ n\in Z$$

$$n=0 \Rightarrow x+y=\frac{3}{2}\pi$$

$$n=1 \Rightarrow x-y=-\frac{\pi}{2}$$

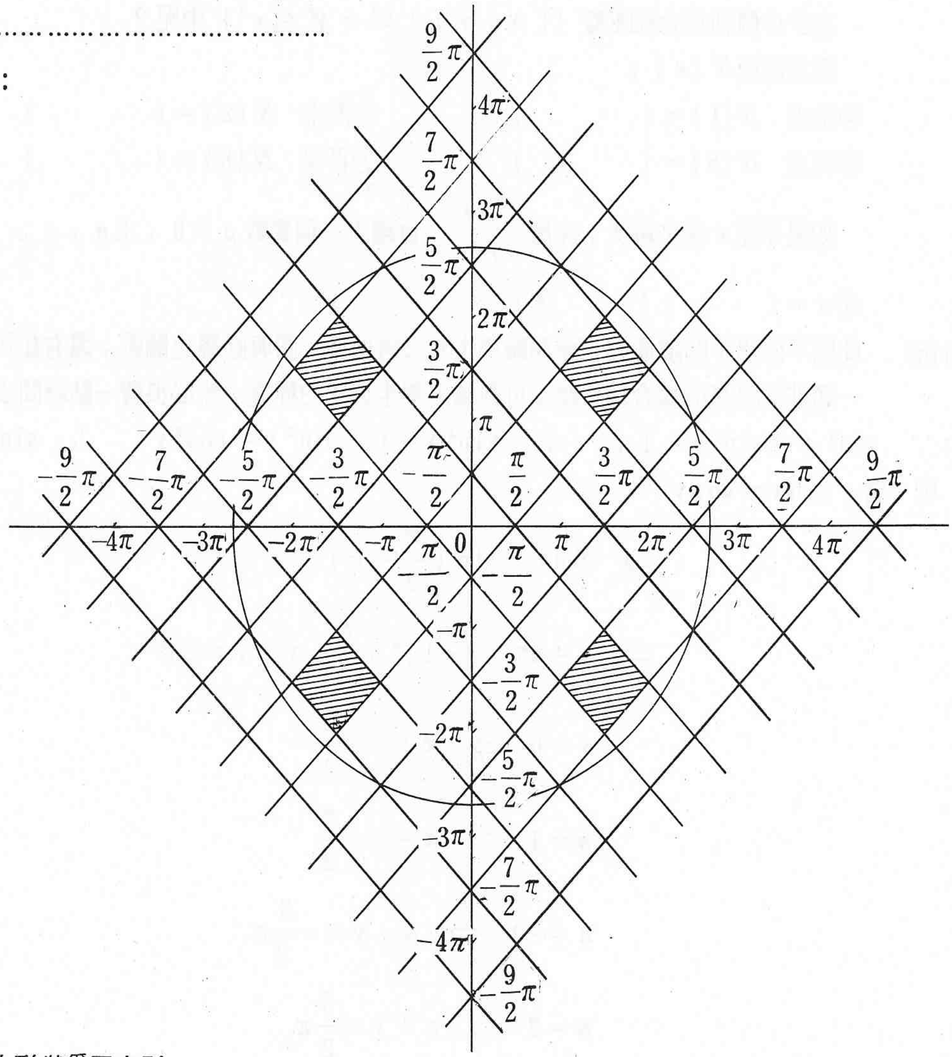
$$n=2 \Rightarrow x+y=\frac{7}{2}\pi$$

$$n=-1 \Rightarrow x-y=-\frac{5}{2}\pi$$

$$n=-2 \Rightarrow x+y=-\frac{\pi}{2}$$

……………………………………

其圖形如下：



依題意知

①每個細胞之形狀為**正方形**

②每個細胞之面積近似值為 $4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=4.93325\fallingdotseq 4.9$

∵ $N(1)$ 表細胞在 $x^2+y^2\leq 1$ 中之個數

③$N(1)=0$

④$N(2)$ 表細胞在 $x^2+y^2\leq 2^2$ 中之個數

∴ $N(2)=1$

⑤$N(5)$ 表細胞在 $x^2+y^2\leq 5^2$ 中之個數

∵ $\frac{3}{2}\pi<5<2\pi$，且點 $(0,0)$ 至 $x+y=\frac{5}{2}\pi$ 之距離

$$d=\frac{\frac{5}{2}\pi}{\sqrt{2}}=5.554>5$$

$\therefore\quad N(5)=3^2=9$

⑥$N(8)$表細胞在 $x^2+y^2\leq 8^2$ 中之個數

$\because \frac{5}{2}\pi<8<\frac{7}{2}\pi$，又 $(0, 0)$ 至 $x+y=\frac{7}{2}\pi$ 之距離

$$d=\frac{\frac{7}{2}\pi}{\sqrt{2}}\doteqdot 7.776<8$$

故　$N(8)=5^2+4=29$

由極限之性質知當 $r\to\infty$ 則內接於圓的每一細胞之面積總和與圓之面積相等

$$\therefore\quad \lim_{r\to\infty}N(r)\times\frac{\pi^2}{2}=\pi r^2$$

$$\therefore\quad \frac{N(r)}{r^2}=\frac{2}{\pi}$$

$\therefore$　⑦答　$\alpha=2$　　　⑧答　$\beta=\frac{2}{\pi}$

"結語"

這雖是一篇平凡的文章，然具有很大的啓示作用，至少你可領悟到，爲"數學之道"，必須從徹底了解"原理原則"起，多做一些平凡的試題，然必須學會如何推廣，應用，當然若能依此方法，再配合恒心，耐心，多加演練，當然成功是屬於你的，同學們，讓我們共同努力吧！

——本文作者現任教於台南新化高中