# Archimedes（阿基米德）論面積

康 明 昌

## 背 景

時間是紀元前214年左右，距離Alexander the Great（亞歷山大帝）逝世已經有一百年，距離Plato（柏拉圖），（427～347 B.C.）在雅典講學也有一百五十年了。隨著Alexander the Great的遠征，希臘文明散佈到東方世界。希臘的商人、工匠、醫生、學者來到埃及、米索不達米亞與印度河河谷，建立城市，定居下來。

在希臘化時期，由於東西文化的融合，促進了文明快速的發展。地中海沿岸埃及的亞歷山大城（Alexandria），因爲位於希臘世界的地理中心，也就變成當時文化與經濟活動的中心。在希臘化的最先一百年中（330～220 B.C.），這裡孕育了許多偉大的數學家，如Euchid（歐幾里德）、Eratosthenes、Nicomedes、Apollonius。當然，除了亞歷山大城之外，還有許多文明鼎盛的城市，如西西里島上的Syracuse城，偉大的Archimedes（287～212 B.C.），便曾在那裡居住過。

這時候，羅馬已經崛起，羅馬人與迦太基人的爭霸戰爭第一次布尼克戰爭（the Punic war）才只是二十多年前的事。紀元前218年，第二次布尼克戰爭爆發。由於Syracuse城與迦太基訂立攻守同盟，因此羅馬人派遣一支軍隊圍攻Syracuse。

### 登場人物

Archimedes：以下簡稱「阿」。
使者：Archimedes 的朋友，亞歷山大城天文學家Dositheus 的信使，以下簡稱「使」。
國王：Syracuse國王Hieronymus，以下簡稱「王」。

對話發生在Archimedes 家裡。全部對話由Archimedes 在發生的次日，口述給他的學生筆錄下來。

**阿：** 昨天當我正在計算$\pi$的近似值時，僕人來通報我，我的朋友Dositheus 有一位使者要見我。我實在有點不想見他，因爲我正工作到興頭。$\pi$是半徑爲1的圓面積。幾百年來許多數學家都想計算出$\pi$究竟是哪一個數，7／2嗎？304／101嗎？還是像埃及人所說的是256／81呢？（註一）一兩個星期前，我想到用圓內接正 96 邊形來計算$\pi$的近似值，我已經得到

$$\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$$

我正要把這個結果覆查一下。眞不巧，Dositheus 的使者來了。

〔使者上〕

**使：** Archimedes 先生，我的主人 Dositheus 向你問候，我還帶來一封他寫給你的信。

**阿：** Dositheus 先生好嗎？他最近在忙些什麼？

使：Dositheus 先生和你一樣，都非常健壯。只是他最近有一些煩惱。他證明了：

**兩條圓錐曲線的交點不能超過四個**

可是那個年輕的Apollonius 偏偏說，這個證明是錯的。他們爭吵得很兇。我的主人好生氣！

阿：我上次寫給你主人的信收到了嗎？我告訴他，我能夠求出球的表面積與體積，拋物線的面積。我那些亞歷山大城的朋友怎麼說？

使：他們對於你的偉大數學發現，都非常驚訝與佩服。連驕傲的Apollonius看到你的信使到來，都會神經緊張起來！不過我的主人也有一點抱怨，他說，你為什麼只把你發現的結果告訴他們，你為什麼不把這些結果的解法或證明也告訴他們？

阿：我不是已經告訴過我的朋友 Dositheus 了嗎？有什麼比證明一個新定理使數學家更快樂？何況Dositheus 和 Conon ，我那個去世多年的老朋友，是那麼勤勉，那麼傑出。說不定他們在證明我的定理的過程中，還會有其他重大的發現呢？

使：可是我的主人已經在你發現的結果上面，花了許多年的時間，還得不到證明。我們很擔心：你這次會不會又故意告訴我們幾個錯誤的結果，像你上次作弄Fantaseus 一樣？

阿：（笑著）呵，呵！那個愛吹牛的 Fantaseus 。每次他總是宣稱他老早就得到和我一樣的結果。我如果不給他一點顏色看，眞不知道他的牛皮會吹得多大哩！

使：Archimedes 先生。我的主人在我臨出門的時候，一再的交代我，務必請求你，告訴他一些你的證明。他說， Fantaseus 再也不敢大言不慚了。

阿：Dositheus 的使者。你也懂得一些數學嗎？

使：是的，是的。我懂得一些，雖然我愚笨如驢。只要你肯耐心的講，我一定盡我最大的力量把你的證明記下來。

〔僕人進來通報，國王來訪。Archimedes與使者出來迎接〕

阿：親愛的國王，你好久沒有光臨寒舍了。你看來不太愉快，是嗎？

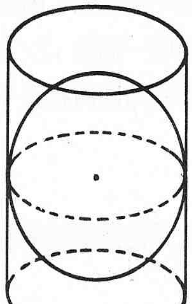
王：正是。剛才有人來通報，羅馬人已經正式向我們宣戰。大家都說，你是智慧的 Archimedes 。我是來向你請教，我們該怎樣抵抗兇暴的羅馬人的進攻。

阿：親愛的國王，讓我為你介紹一個人，我的朋友亞歷山大城 Dositheus 先生的使者。我剛剛才準備要向他解釋我最近證明的幾個定理。你不如先放開心事。聽一聽數學家攻城略地的故事。讓你焦燥的心靈冷靜下來，也許不無好處。

王：好的。請你們繼續談吧。Euclid 說過，幾何學裡沒有王者之路。就請你們把我想成是一個雅典的公民，虔誠的聆聽 Socrates（蘇格拉底，469～399 B.C.）的教誨。當我的思路走上歧途時，請你們指點我，帶領我。

## 槓桿原理與球的體積

阿：聰明的使者，你大概已經知道我能夠證明：如果有一個半徑為 $r$ 的球，還有一個底部半徑為 $r$ ，高為 $2r$ 的圓柱體。那麼圓柱體的體積是球的體積的 3／2 倍，圓柱體的表面積（連上下底）也是球的表面積的 3／2 倍。（如右圖）



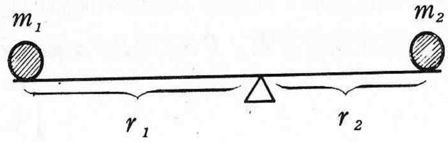
使：我的主人想破了腦袋也沒辦法證明你這個定理。我們知道，你一定是利用 Eudoxus 的「窮盡法」來證明的。

王：Archimedes，你眞了不起，你怎麼得到這個結果呢？

阿：（微笑）是的。先不要忙著去證明這個定理。你們知道我是怎樣猜到這個答案嗎？我利用了「槓桿原理」。

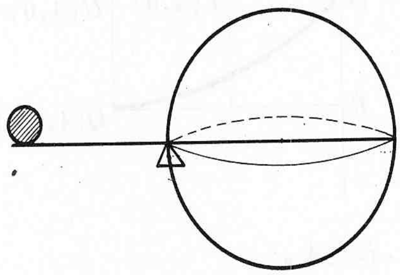
王：使：（同聲）「槓桿原理」？

阿：是的。假設這裡有一根槓桿（如下圖），△是槓桿的支點，左邊放一個質量是 $m_1$ 的小鉛球，右邊放一個質量爲 $m_2$ 的小鉛球。如果 $r_1$ 與 $r_2$ 分別是左，右兩邊鉛球與支點的距離，那麼槓桿平衡的充份必要條件是 $m_1 r_1 = m_2 r_2$。這就是「槓桿原理」。你們想想：如果這兩個立體都是用同樣的均勻物質製成的，例如他們的密度都是 $\rho$，$\rho$ 是一個固定的常數。假設球的體積是 $V_1$，圓柱體的體積是 $V_2$，那麼他們的質量是多少？




王：球的質量是 $\rho V_1$，圓柱體是 $\rho V_2$。

阿：如果有一根槓桿如下圖，把這個球放在支點右側（如圖，假想這根槓桿是一根很細的鐵線，從球的最



左側穿進去，通過球心，直到最右側），支點左側放一個小鉛球，這個小鉛球可以想像成一個點，沒有體積，但是質量是 $\rho V_1$。那麼小鉛球放在哪裡，這個槓桿才會平衡。

使：放在支點左側距離 $r$ 的位置。因爲球的重心是球心，因此右側的球體可以想像是在支點右側距離 $r$ 的位置也擺一個與球同樣質量的小鉛球。

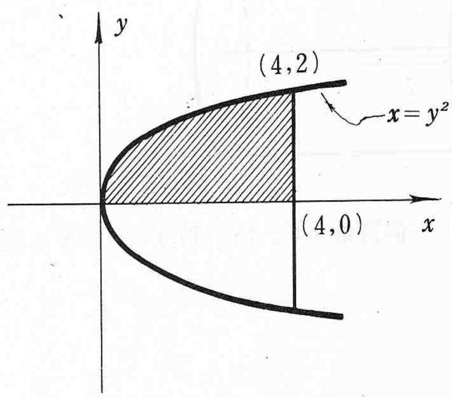
阿：同樣的問題，如果支點右側擺上圓柱體，左側換個質量是 $\rho V_2$ 的小鉛球，那麼鉛球要放在哪裡？

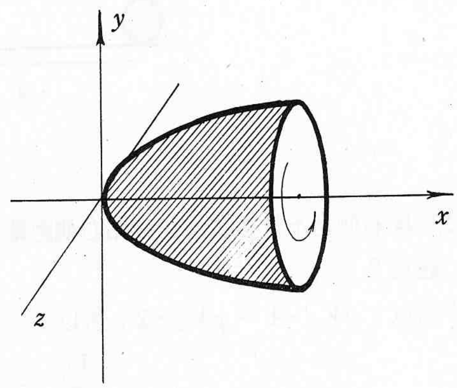
使：仍然放在同樣位置。因爲圓柱體的重心還是在支點右方距離 $r$ 的位置。

阿：我只是利用這些原理就猜出球的體積與表面積。不過我現在要賣個關子，不告訴你們我的方法的細節，我先舉幾個簡單的例子來說明一下槓桿原理的妙用。

## 拋物線的旋轉體體積

阿：現在有一個拋物線 $x = y^2$，繞著 $x$ 軸旋轉，如下圖：



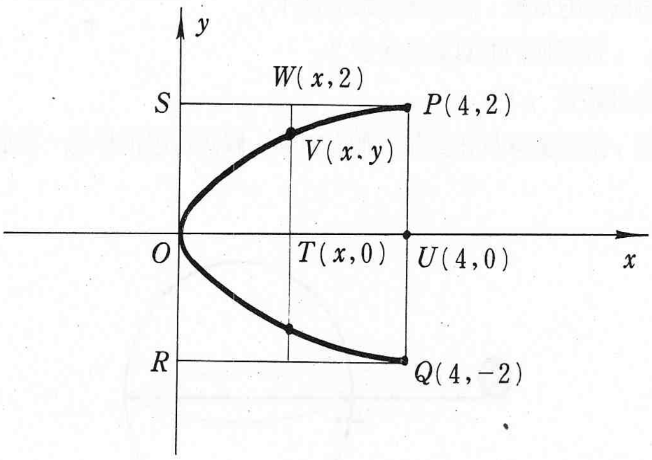



你們能不能猜出斜線部份所繞出來的體積？如果我說，我拿一個垂直於 $x$ 軸的平面和這個旋轉體相交，每一個橫截面都是一個圓，我如果把這些圓的面積通通湊起來，你們相信不相信這樣就得到了旋轉體的體積？

王：我相信，但是我不能證明這件事。

阿：我也相信，同樣的，我也不能證明它。但是這就夠了。

現在請看下圖。$PS /\!/ QR /\!/ x$ 軸。$PS$ 繞著 $x$ 軸旋轉可以得到一個圓柱體。




使：這個圓柱體的底部半徑是 2，高是 4。

阿：是的。所以我們只要求出這兩個旋轉體體積的比例就夠了。

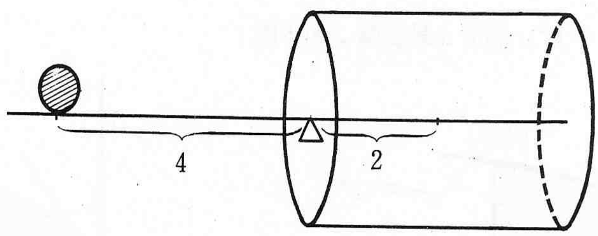
再看上圖。如圖取一個平面垂直於 $x$ 軸，這個平面在這兩個旋轉體的橫截面都是圓。如果這個平面在 $OU$ 線段之上變動，我們就得到所有可能的橫截面。

假設 $T$ 是 $OU$ 之上的任意點，我們的平面在 $T$ 點和 $x$ 軸相交，那麼這個平面這時候在圓柱體的橫截面的半徑是 $TW$，在拋物線旋轉體的橫截面的半徑是 $TV$。因此

$$\frac{\text{圓柱體橫截面面積}}{\text{拋物線旋轉體橫截面積}}=\frac{TW^2}{TV^2}=\frac{4}{y^2}=\frac{4}{x}。$$

所以，我們如果把原點想像成槓桿的支點，$x$ 軸想像成槓桿，把圓柱體橫截面留在原來的位置。把拋物線旋轉體的橫截面搬到支點左側距離 4 的位置，我們是不是得到一個平衡的狀態？如果，我們對於每一個橫截面都這麼做，我們得到什麼呢？

使：天啊！槓桿左邊相當於一個質量 $\rho V_1$ 的鉛球（如下圖），$V_1$ 是拋物線旋轉體的體積，$\rho$ 是密度。




阿：槓桿右側是不是相當於在支點右側距離 2 的位置擺上一個質量 $\rho V_2$ 的小鉛球，其中 $V_2$ 是圓柱體的體積？

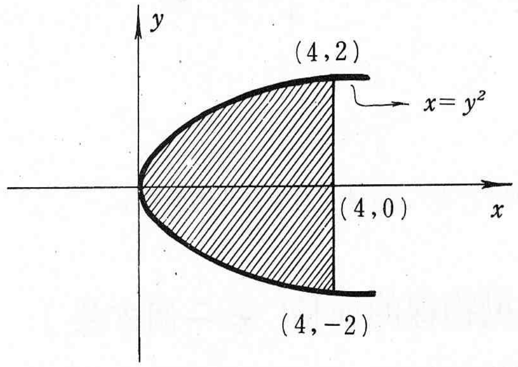
王：所以，$\rho V_1 \cdot 4=\rho V_2 \cdot 2$。所以，

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$$

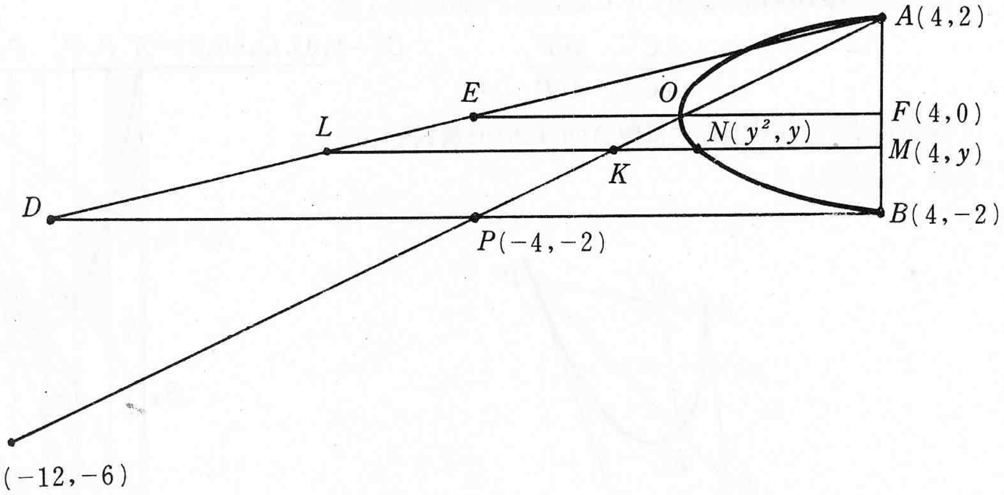
哈哈，原來這麼簡單！

## 拋物線的面積（第一個方法）

**阿**：我們再看一個例子。請看下圖，我們怎麼求出斜線部分的面積？




**使**：Archimedes 先生，這次讓我來做。$BD /\!/ EF$，過$A$點做拋物線的切線$AE$。取$AP=PC$。




我知道$EO=FO$，這是 Apollonius告訴我的（註二）。因爲$EO=FO$，$E$與$D$的座標很容易求出：$E(-4,0)$，$D(-12,-2)$。現在設$M$在線段$AB$上任意移動，$MN /\!/ EF$。$K$，$L$的座標也可求出：$K(2y, y)$，$L(4y-4, y)$。

$$\frac{LM}{NM}=\frac{8-4y}{4-4y^2}=\frac{4}{2+y}=\frac{AB}{MB}$$

因此，

$$\frac{LM}{NM}=\frac{AB}{MB}=\frac{AP}{KP}=\frac{CP}{KP}$$（註三）。

如果我們讓$M$在$AB$之上運動，把所有的$NM$的長度湊起來，我們就得到拋物線的面積，把所有的$LM$的長度湊起來，我們得到$\triangle ADB$的面積。

現在因爲$LM/NM=CP/KP$，我們把$AC$看成一根槓桿，$P$看成支點，把線段$LM$留在原來的地方，把線段$NM$搬到$C$的位置，我們就得到一個平衡狀態。

所以，我們得到：在槓桿$AC$上面，$C$點放一個小鉛球，其質量是$\rho\alpha$，其中$\alpha$是拋物線面積，$\rho$是均勻物質的密度；在支點的另一側，仍然放著三角形$\triangle ADB$。還是會保持平衡狀態。

但是$\triangle ADB$的重心是其三個中線的交點，這個重心恰好是線段$PA$上距離$P$點為⅓$PA$的位置。因此，槓桿另一側可以想成，在這個重心位置，也放個小鉛球，質量是$\rho\cdot\beta$，$\beta$是$\triangle ADB$面積。所以

$$PC\cdot\rho\alpha=\frac{1}{3}PA\cdot\rho\beta\quad。$$

而$PC=PA$，因此

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}$$

但是$\beta=32$，所以$\alpha=32/3$。這就是斜線部分的面積。

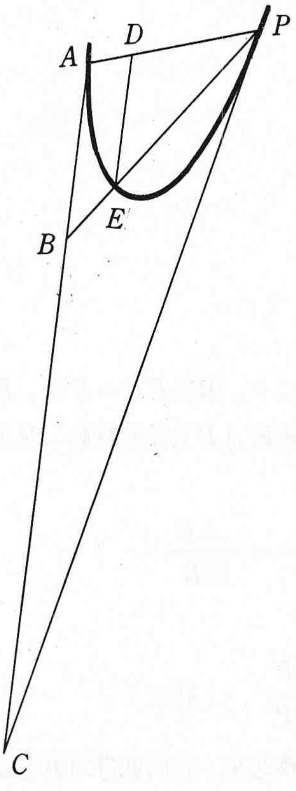
## 拋物線的面積（第二個方法）

**阿：**我還有一個方法可以計算拋物線的面積。在說明這個方法之前，我先敍述一個拋物線的性質。假設有一個拋物線（如圖一）。如果$A$與$P$是拋物線上的任意兩點，$D$是$AP$上的任意點，$AB$與$DE$都是平行於拋物線對稱軸的直線，$PC$是通過$P$點的切線，則

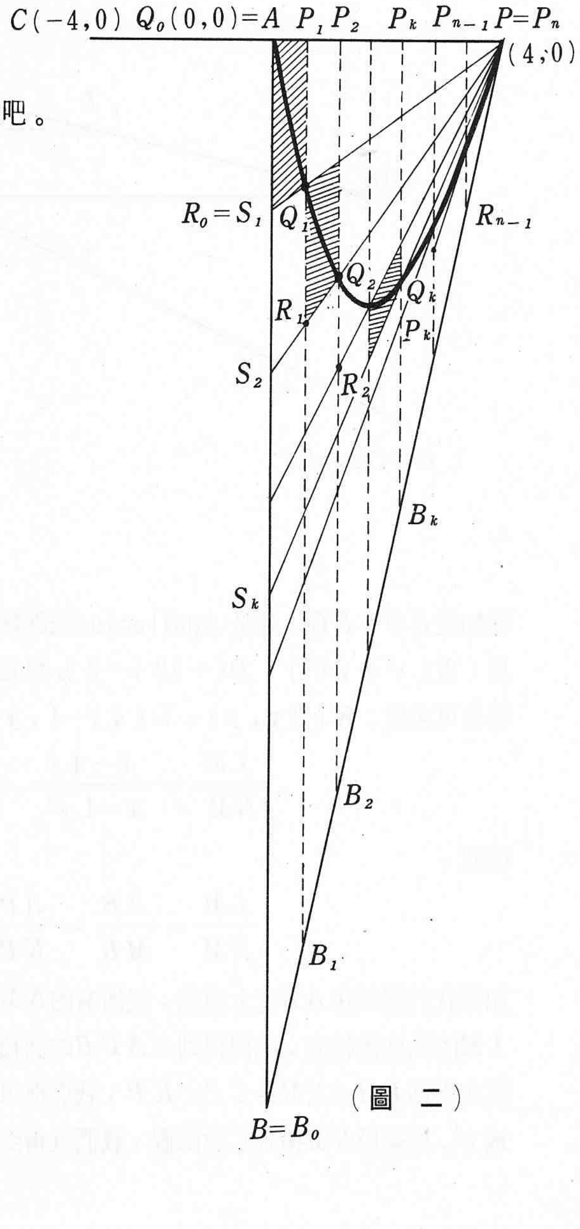
$$\frac{AC}{BC}=\frac{AP}{DP}$$

（轉向使者）這個性質你大概聽 Apollonius講過吧。

**使：**是的。（註四）




（圖　一）




（圖　二）

**阿：**假設這個性質。我要說明我的第二個求面積的方法。假設有一個拋物線 $y = x^2 - 4x$ （如圖二），如何求拋物線 $AQ_1P$ 之間的面積呢？設 $BP$ 是通過 $P$ 點的切線，$AB$ 平行於拋物線的對稱軸。

設 $n$ 是任意正整數，現在把線段 $AP$ 作 $n$ 等分，其分點分別是 $\{A, P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k, \cdots, P_n = P\}$ 對於每一個分點 $P_k$，$1 \le k \le n-1$，作直線 $P_kQ_k$ 平行於拋物線對稱軸，$Q_k$ 在拋物線上。$S_k$ 是 $PQ_k$ 與 $AB$ 的交點。$R_k$ 是 $P_kQ_k$ 與 $PQ_{k+1}$ 的交點。$B_k$ 是 $P_kQ_k$ 與 $PB$ 的交點。

我現在要證明：

$$\sum_{k=1}^{n-1} \text{梯形} Q_kP_{k+1} \text{ 面積} < \frac{1}{3} \triangle ABP \text{ 面積} < \sum_{k=0}^{n-1} \text{梯形} R_kP_{k+1} \text{ 面積（註五）。}$$

請注意，梯形 $Q_{n-1}P_n$ 與梯形 $R_{n-1}P_n$ 其實是三角形。

要證明這些關係，我們只要把 $x$ 軸想成是一根槓桿，$A$ 點是支點。

現在在 $C$ 點掛上 $n$ 個小鉛球，第一個小鉛球和梯形 $B_0P_1$ 平衡，第二個和梯形 $B_1P_2$ 平衡，第 $k$ 個小鉛球和梯形 $B_{k-1}P_k$ 平衡。

那麼在 $C$ 點這些小鉛球就和 $\triangle ABP$ 平衡。

但是 $\triangle ABP$ 的重心的水平位置距離原點是 $4/3$。因此在 $C$ 點的那些小鉛球的總質量是 $\rho\alpha/3$，其中 $\alpha$ 是 $\triangle ABP$ 的面積，$\rho$ 是均勻物質密度。

另一方面，由相似形關係，我們知道

$$\frac{\text{梯形} B_0P_1}{\text{梯形} R_0P_1} = \frac{B_0A + B_1P_1}{R_0A + Q_1P_1} = \frac{B_0A}{S_1A} = \frac{AP_n}{AP_1} = \frac{AC}{AP_1}$$

同理，對於 $1 \le k \le n$，

$$\frac{\text{梯形} B_{k-1}P_k}{\text{梯形} R_{k-1}P_k} = \frac{B_{k-1}P_{k-1} + B_kP_k}{R_{k-1}P_{k-1} + R_kP_k} = \frac{B_0A}{S_kA} = \frac{AP_n}{AP_k} = \frac{AC}{AP_k}$$

因此，我們如果在 $P_k$ 掛上一個質量為 $\rho \cdot \{$梯形 $B_{k-1}P_k$ 面積$\}$ 的小鉛球，在 $C$ 點掛上一個質量為 $\rho \cdot \{$梯形 $R_{k-1}P_k$ 面積$\}$ 的小鉛球，我們得到另一種平衡狀態。我們對於 $k = 1, 2, \cdots\cdots, n$ 都這麼做，那麼，$C$ 點相當於掛上一個質量 $\rho \cdot \beta$ 的小鉛球，其中 $\beta = \sum_{k=1}^{n-1}$ 梯形 $R_kP_{k+1}$ 面積；槓桿右側，在每一個 $P_k$ 點掛上一個質量為 $\rho \cdot \{$梯形 $B_{k-1}P_k$ 面積$\}$ 的小鉛球 $k = 1, \cdots, n$。

很顯然，這時候槓桿右側的質量比在 $AP$ 上擺上 $\triangle ABP$ 要大。（後者是我們最先考慮的平衡狀態的右側。）

所以，$\rho \cdot \beta > \dfrac{\rho \cdot \alpha}{3}$，或 $\beta > \dfrac{\alpha}{3}$，也就是，

$$\frac{1}{3} \triangle ABP \text{面積} < \sum_{k=0}^{n-1} \text{梯形} R_kP_{k+1} \text{面積}$$

同理，可證明

$$\sum_{k=1}^{n-1} \text{梯形} Q_kP_{k+1} \text{面積} < \frac{1}{3} \triangle ABP \text{面積。}$$

設 $\gamma = \sum_{k=1}^{n-1}$ 梯形 $Q_kP_{k+1}$ 面積。

則 $\beta - \gamma = \sum_{k=1}^{n}$ 梯形 $Q_{k-1}Q_k$ 面積。

注意，梯形 $Q_{n-1}Q_n$ 其實是 $\triangle Q_{n-1}R_{n-1}P$。

可是，因為

$$\frac{AB}{AS_1} = \frac{AP_n}{AP_1} = n, \quad \frac{AB}{AS_2} = \frac{AP_n}{AP_2} = \frac{n}{2}, \cdots, \quad \frac{AB}{AS_k} = \frac{AP_n}{AP_k} = \frac{n}{k},$$

所以 $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_k, \cdots\cdots, S_{n-1}$ 是線段 $AB$ 的 $n$ 等分點。

因此$PS_1$，……，$PS_{n-1}$ 在每一個線段$P_kB_k$，$k=1$，……，$n-1$，都截出$n$個相等的小線段。

所以，$\sum_{k=1}^{n}$ 梯形$Q_{k-1}Q_k$面積 $=\triangle AR_0P$面積 $=\dfrac{\alpha}{n}$

我現在把我們得到的結果總結一下，因爲$\beta$與$\gamma$是把$AP$作$n$等分之後才得來的，所以我們把$\beta$寫作$\beta_n$，$\gamma$寫作$\gamma_n$：

$$\begin{cases} \gamma_n < \dfrac{\alpha}{3} < \beta_n \\ \gamma_n < \delta < \beta_n \quad , \delta\text{是拋物線 } AQ_1P \text{ 的面積，} \\ \beta_n - \gamma_n = \dfrac{\alpha}{n} \end{cases}$$

（轉向使者）你知道Eudoxus 的「窮盡法」中有一種方法，可以從以上三件事導出$\delta=\alpha/3$？

**使**：我知道了。Eudoxus 說，給定兩個幾何量（線段、面積、體積、或其比例）$\xi$與$\eta$，且$\xi>\eta$。現在取$\xi_1>\dfrac{1}{2}\xi$，$\xi_2>\dfrac{1}{2}(\xi-\xi_1)$，$\xi_3>\dfrac{1}{2}(\xi-\xi_1-\xi_2)$。那麼經過有限次之後，

$\xi-\xi_1-\xi_2-\cdots\cdots-\xi_n<\eta$。

**阿**：Eudoxus 的確是這麼說的。不過，我們可以把這個性質用比較簡潔的方式表示出來：

任給兩個幾何量$\xi$與$\eta$，一定存在一個正整數$n$，使得 $n\xi>\eta$，也就是$\xi>\dfrac{\eta}{n}$。

**王**：（想了一下）Archimedes 先生，你這個敍述果然簡潔多了，並且容易瞭解。我們就把它叫做「Archimedes 性質」吧。

**阿**：瞭解了這個性質之後，我就可以證明$\delta=\dfrac{\alpha}{3}$。如果$\delta\neq\dfrac{\alpha}{3}$，先假設$\delta>\dfrac{\alpha}{3}$。

因此存在一個正整數$n$，使得$\dfrac{\alpha}{n}<\delta-\dfrac{\alpha}{3}$。

利用這個$n$，我們把$AP$做$n$等分，得到$\beta_n$ 與$\gamma_n$。現在

$$\gamma_n<\frac{\alpha}{3}<\delta<\beta_n \quad ,$$

因此，

$$\delta-\frac{\alpha}{3}<\beta_n-\gamma_n$$

但是，我們又有

$$\beta_n-\gamma_n=\frac{\alpha}{n}<\delta-\frac{\alpha}{3} \quad 。$$

所以我們就得到一個矛盾現象了。

同理，可證明$\delta<\alpha/3$，也是不可能的。

## Platonic School（柏拉圖學派）或Democritus' School？

**使**：Archimedes 先生，上面的論證眞是美妙極了。不過，你能不能容許我提出一個問題？你說，面積是由許多線段的長度湊合起來的，體積是由許多橫截面的面積湊合起來的。這究竟有什麼根據？你能

夠用Euclid「幾何原本」那些公設證明這些事情嗎？你又說，在槓桿的一側擺上一個物體，相當於在重心位置掛上一個相等質量的小小鉛球。這只不過是實驗的結果而已，難道你有一個普遍性的嚴密的證明嗎？

阿：好個Platonic school 的門人（註六）。你的問題正好擊中我的要害。所以，我在最先就聲明過了，這些方法的優點就在於它們能夠幫助我找到正確的答案。只有找到了正確的答案，我才能夠給予嚴謹的證明（註七）。我等一下還要說明第三個拋物線面積的方法。這個方法即使是Plato，也會頷首稱許的。

王：Archimedes 先生。使者先生的問題果然是有些道理。我們說，體積是由許多橫截面的面積湊合起來的。這是不是因爲「立體是由許多橫截面形成的」？

使：如果這樣說，直角錐豈不是由許多橫截面疊起來的？但是，如果這些橫截面是同樣大小的，那麼疊起來的立體是圓柱體而不是圓錐體。如果這些橫截面不是一樣大小，那麼疊起來的立體會像階梯一樣，一級一級的，而不是平滑的直角錐。

阿：完全正確。你們的懷疑都是有根據的。（轉向國王）不過，親愛的國王，如果有一個方法可能可以擊沈羅馬人的戰艦，你願意先試用這個方法還是先證明這個方法確實可行才使用呢？

王：我當然願意先試用看看。說來對你可能有一點不敬，我覺得哲學家的推理與冥思有時候是非常沈悶並且令人厭煩的。

阿：尊貴的國王，你的第一個意見我完全同意。可是你對哲學家的批評實際上是一種反知識的態度，這種態度與其說是希臘的，不如說是羅馬的。那些只知道買一些希臘雕塑品來裝飾家裡的羅馬人對於希臘文化精華所在顯然是毫無所知。我敢斷言，羅馬人留給後世的文化遺產一定不如我們希臘人。

使：Archimedes 先生，我的主人非常尊敬你。可是我的主人常說，你和純粹的希臘數學家並不完全相同。對我們希臘人而言，幾何是最高級的數學，算術（數論與一些計算問題）是次一等的。可是你爲什麼要花費你的寶貴時間去計算

$$x^2 - 4{,}729{,}494\, y^2 = 1$$

的整數解呢？（註八）

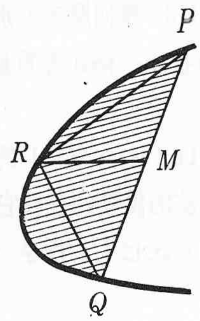
阿：所謂高級與次一等的區別，只是一種偏見。就我來看，數學像一顆含有無數面的寶石，每一面有每一面的光芒與色彩，彼此輝映，相互襯托。過份強調幾何的重要性，我想，只會導致希臘數學的退化而走入絕路（註九）。

另一方面，你最先的問題，爲什麼體積可以看成是許多橫截面的面積湊合起來的？這個想法並不是我自己想出來的，這是Democritus （約460～370 B.C.）想出來的。

Democritus 認爲，物質是由許多不能再分割的原子（atoms）構成的。就體積而言，橫截面的面積就是原子。這種「原子說」雖然沒有充分的理論根據，可是卻是一種非常有用的方法論。至少物理學家與化學學家對待「原子說」，就不像數學家那麼苛刻。Plato的學生認爲「原子說」是數學的一劑毒藥，因此常故意忽略Democritus 的貢獻。一個很小的例子，Euclid 的「幾何原本」絕口不提，Democritus 知道圓錐體體積是等底等高圓柱體體積的1／3（註十）。Platonic school 過份強調證明的嚴格性，對於數學的發展並非不可能發生反面的作用。如果Platonic school 的哲學與科學理論在後代仍然大行其道，我這個用槓桿原理猜測面積的方法，恐怕不出幾百年，就要被後代的人遺忘了。（註十一）

## 拋物線的面積（第三個方法）

阿：（轉向使者）爲了回答你的責難，我現在要提出一個無懈可擊的方法。




請看右圖。$P$與$Q$是拋物線$x = y^2$上的任意兩點。請問斜線部份的面積是多少？我們要證明，如果$M$是$PQ$的中點，$MR$平行於拋物線的對稱軸，則斜線部份面積

$$= \frac{4}{3} \cdot \triangle PQR\text{的面積。}$$

我們仍然先考慮拋物線的一個性質。

看圖1，$P$，$Q$爲拋物線上任意兩點，$M$是$PQ$的中點，$RM$平行於拋物線的對稱軸，$RP'$是通過$R$點的切線，

$PP' /\!/ QQ' /\!/ MR$。

和以前一樣，如果我們像Apollonius一樣聰明（註十二），那麼我們就可以斷言$P'Q' /\!/ PQ$。

所以，$\triangle PQR$面積$=\frac{1}{2}$平行四邊形$PQ'$ 的面積。

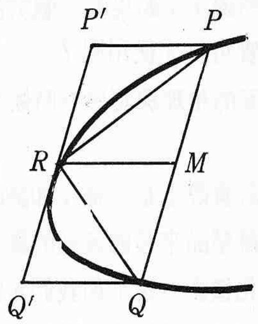



圖1

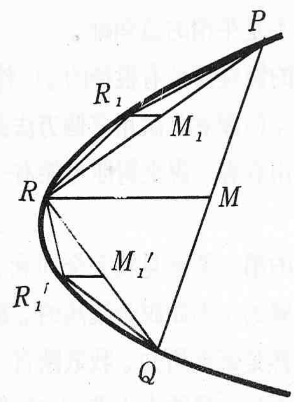



圖2

但是平行四邊形$PQ'$ 面積 $>$ 拋物線$PQR$面積。

結論：$\triangle PQR$面積$> \frac{1}{2}$ 拋物線$PQR$面積。

現在，再看圖2，$P$與$Q$仍然是拋物線上任意兩點，$M$是$PQ$中點，$RM$平行於對稱軸。在$PR$與$QR$如法泡製。也就是，$M_1$ 是$PR$的中點，$M_1'$是$QR$的中點。

$$R_1M_1 /\!/ R_1'M_1' /\!/ RM$$

通過$R$點作一線平行$PQ$，這條直線也是通過$R$點的切線。通過$P$，$Q$各作直線平行$RM$。由相似形關係（註十三），可得

$$R_1M_1 = \frac{1}{4} RM = R_1'M_1' \quad , \quad \triangle PR_1M\text{面積} = \frac{1}{8} \triangle PRM\text{面積} \quad ,$$

$$\triangle PRR_1 \text{ 面積} + \triangle QRR_1' \text{ 面積} = \frac{1}{4} \triangle PQR\text{面積} \quad 。$$

設$\alpha = \triangle PQR$面積，$\beta =$拋物線面積，那麼假設$A_1$ 是第一步驟的三角形面積，$A_1 = \triangle PQR$；$A_2$ 是第二步驟的三角形面積，$A_2 = \triangle PRR_1' + \triangle QRR_1'$ ；以下類推。

則$A_1 = \alpha$ ，$A_2 = \frac{\alpha}{4}$ ，……，$A_n = \frac{\alpha}{4^{n-1}}$，並且

$$A_1 > \frac{1}{2}\beta \quad , \quad A_2 > \frac{1}{2}(\beta - A_1) , \quad A_n > \frac{1}{2}(\beta - A_1 - A_2 - \cdots\cdots - A_{n-1}) ,$$

整理起來是，再利用「Eudoxus（或Archimedes）性質」，

$$\begin{cases} (1)\ \alpha > \dfrac{1}{2}\beta\ ,\ \dfrac{\alpha}{4} > \dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\ ,\ \dfrac{\alpha}{4^n} > \dfrac{1}{2}\left(\beta-\alpha-\dfrac{\alpha}{4}-\cdots\cdots-\dfrac{\alpha}{4^{n-1}}\right), \\ (2)\ \text{並且對任何幾何量}\gamma \neq 0\text{，一定存在正整數}N\text{，使得}\ \beta-\alpha-\dfrac{\alpha}{4}-\cdots-\dfrac{\alpha}{4^N} < \gamma \end{cases}$$

現在我們要證明 $\beta = \dfrac{4}{3}\cdot\alpha$ 。（註十四）

由等比級數公式可知，$\alpha + \dfrac{\alpha}{4} + \cdots + \dfrac{\alpha}{4^n} = \dfrac{4}{3}\alpha - \dfrac{1}{3\cdot 4^n}\alpha$

如果 $\beta > \dfrac{4}{3}\alpha$ ，取一個正整數 $N$，使得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3\cdot 4^N}\alpha < \dfrac{1}{2}\left(\beta-\dfrac{4}{3}\alpha\right) \\ \beta-\alpha-\dfrac{\alpha}{4}-\cdots-\dfrac{\alpha}{4^N} < \dfrac{1}{2}\left(\beta-\dfrac{4}{3}\alpha\right) \end{cases}$$

由第一個關係，可得

$$\frac{4}{3}\alpha-\alpha-\frac{\alpha}{4}-\cdots-\frac{\alpha}{4^N} = \frac{1}{3\cdot 4^N}\alpha < \frac{1}{2}\left(\beta-\frac{4}{3}\alpha\right)$$

因此，可得

$$\begin{cases} \alpha+\dfrac{\alpha}{4}+\cdots+\dfrac{\alpha}{4^N} < \beta < \dfrac{1}{2}\left(\beta-\dfrac{4}{3}\alpha\right)+\alpha+\dfrac{\alpha}{4}+\cdots+\dfrac{\alpha}{4^N} \\ \alpha+\dfrac{\alpha}{4}+\cdots+\dfrac{\alpha}{4^N} < \dfrac{4}{3}\alpha < \dfrac{1}{2}\left(\beta-\dfrac{4}{3}\alpha\right)+\alpha+\dfrac{\alpha}{4}+\cdots+\dfrac{\alpha}{4^N} \end{cases}$$

所以，

$$\beta-\frac{4}{3}\alpha < 2\cdot\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{4}{3}\alpha\right)\ !$$

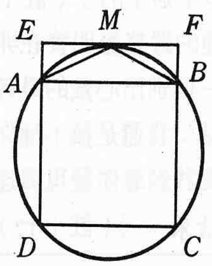
矛盾。

同理可證 $\beta < \dfrac{4}{3}\alpha$ 也是不可能。

## 兩圓面積的比是其半徑平方的比

**阿**：做過這些例子之後，你們大概已經能抓住「窮盡法」的要領了吧。你們願意證明：「兩圓面積的比是其半徑平方之比」這件事嗎？

**王**：Archimedes 先生，讓我試試。首先我想說明：圓內接正多邊形可以「窮盡」圓的面積。如圖，首先我們從圓內接正方形 $AC$ 出發，做圓內接正八邊形 $AMB\cdots\cdots$。設 $EF \,/\!/\, AB$。




正 8 邊形 $AMB\cdots\cdots$ = 正方形 $AC + 4\cdot\triangle AMB$

= 正方形 $AC + 4\cdot\dfrac{1}{2}$ 矩形 $AF = \dfrac{1}{2}$ 正方形 $AC$ +

$\dfrac{1}{2}$｛正方形 $AC + 4\cdot$ 矩形 $AF$｝$> \dfrac{1}{2}$ 正方形 $AC$ +

$\dfrac{1}{2}$ 圓面積 $> \dfrac{1}{2}$ 圓面積

同理，可證明

$$\text{內接正 16 邊形} > \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\text{圓面積。} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此，利用「Archimedes 性質」（註十五），對於任一個幾何量$\alpha$，都存在一個正整數$n$，滿足

$$\text{圓面積} - \text{內接正 } n \text{ 邊形面積} < \alpha \text{。}$$

現在假設半徑$r_1$與$r_2$的圓面積分別是$A_1$與$A_2$。

我們想證明 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$

假設 $\dfrac{A_1}{A_2}<\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$

取一個半徑是$r'$的圓，面積是$A'$，並且

$$\frac{A_1}{A'}=\frac{r_1^2}{r_2^2}$$

因為 $\dfrac{A_1}{A_2}<\dfrac{A_1}{A'}$，所以$A_2>A'$。

取一個圓內接正$n$邊形在半徑$r_2$之圓內，使其面積與圓面積之差不超過$A_2-A'$。設此正$n$邊形面積為$P_2$。我們得到，

$$0<A_2-P_2<A_2-A' \text{。}$$

因此，

$$A'<P_2<A_2$$

利用這個$n$，在半徑為$r_1$的圓內也造個內接正$n$邊形。設其面積為$P_1$，非常容易可以知道，

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}$$

所以，

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{A_1}{A'}$$

因為$P_1<A_1$，所以$P_2<A'$。

但是我們早已得到 $A'<P_2<A_2$ 矛盾。

同理，可證明 $\dfrac{A_1}{A_2}>\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ 也是不可能的。

**阿：** 完全正確。我相信你們現在已經知道我怎樣得到我最先提到的定理：

「底部半徑為$r$，高為$2r$的圓柱體的體積是半徑為$r$的球體體積的3／2倍。同樣的敘述對於表面積也是對的。」

至於它的嚴格證明，我最近會寫在一本叫做「論球體與圓柱體」的小冊子。我的朋友Dositheus會收到這本小冊子的。（註十六）

這個定理的嚴格證明實在非常巧妙。我很希望我死後，在我的墓碑上刻上這個定理。

**王：** 這眞是一個別出心裁的墓碑！

**使：** 說老實話，我還是搞不懂你怎麼得到那個定理的。拜託你再多指點指點。

**阿：** 何必非要我剝奪你發現眞理的樂趣呢？

（談話結束。）（註十七）

〔註一〕：埃及人關於半徑爲 $r$ 的圓面積公式是 $\frac{256}{81} \cdot r^2$ 。$\frac{256}{81} \approx 3.1604$ 。見Morris Kline 書，19 頁。

〔註二〕：如果讀者不是像Apollonius 那麼熟悉圓錐曲線的性質，他可以假設過 $A$ 點的切線方程式是 $y = x/4 + 1$ 。我們在第四章第一節就可以導出這件事。

〔註三〕：要得到 $LM/NM = CP/KP$ ，直接由各點的座標，當然也可檢查出來。

〔註四〕：假設（ $a$ ，$a^2$ ）是拋物線 $y = x^2$ 上的任意點，如果讀者知道通過（ $a$ ，$a^2$ ）的切線方程式是 $y = 2ax - a^2$ ，很容易可以導出這個性質。我們在第四章第一節會說明如何求出這個切線方程式。

〔註五〕：梯形 $R_k P_{k+1}$ 是梯形 $R_k Q_{k+1} P_{k+1} P_k$ 的簡寫。

〔註六〕：許多人相信 Euclid 是Platonic school 的弟子。見van der Waerden 書P. 196 。

〔註七〕：很有趣的是，Archimedes 完全意識到這些推論的瑕疵。將近二千年後的Leibniz （萊布尼茲）遇到同樣的情形，卻毫無意識到這些推論的不嚴謹性，見van der Waerden書P.214。

〔註八〕：這是所謂Pell equation 。其歷史與解法可參看任何一本初等數論的教科書。許多人相信 Archimedes 並沒有把這個方程式的答案解出來。

〔註九〕： van der Waerden 書第八章與Morris Kline 書第八章詳盡的討論希臘數學衰退的原因。

〔註十〕：Struik書P. 48，對於Platonic school 與 Democritus’ school的不同，有相當新穎的說法。

〔註十一〕：Archimedes 這些方法寫在一本「the Method」的小册子，在New ton（牛頓）與 Leibniz （萊布尼茲）時代已經失傳。直到 1906 年，這本小册子在君士坦丁堡（Constantinople ） 才被人們發現。見van der Waerden書P. 212 。

〔註十二〕：或者我們知道通過 $R$ 點的切線方程式。

〔註十三〕：爲了使我們的圖形清楚起見，上述的補助線沒有畫出來。但是讀者只要利用「拋物線的面積（第二個方法）」中拋物線切線的性質，再配合相似形關係，就可證明 $R_1M_1 = RM/4$ 。

〔註十四〕：(2)是由(1)利用「Eudoxus 性質」得到的。二十世紀的讀者已經具備了無窮等比級數的工具，由(2)就可導出 $\beta = 4\alpha/3$ 。但是 Archimedes 根本不知道什麼是無窮級數？

〔註十五〕：與上一節利用「 Eudoxus （或 Archimedes）性質」一樣。

〔註十六〕：讀者如果自己想不出如何利用槓桿原理發現這個定理，請參考 van der Waerden 書 P. 214 。

〔註十七〕：本章的情節是作者自己杜撰的。有關數學的部份，全部是有憑有據的；有一部份地方使用解析幾何是爲了討論方便，Archimedes 是不知道如何把幾何圖形用代數方程式表示出來的。

## 後　記

本文初稿完全不久，曾經李國偉先生（編者註：李先生爲本所副研究員）指教。承蒙他的協助，作者對於 syracuse 城的歷史與 Archimedes 和 Conon ，Dositheus 師友間的關係，才具有正確的認識。李先生並且在本文文辭做過多番斧正。他的熱心使本文生色不少。

## 參 考 書 目


(1) Morris Kline : *Mathematical thought from ancient to modern times*,「凡異出版社」翻印版。

(2) Dirk J. Struik : *A concise history of mathematics, 3rd revised edition*, Dover Publications Inc., New York, 1967 。

(3) B. L. van der Waerden : *Science awakening*, Oxford University Press , New York, 1961 。


——本文作者現任教於台大數學系