同心魔方陣的普遍造法

林克瀛

同心魔方陣（*concentric magic square*）又稱多層（*bordered*）魔方陣，除了本身是一個魔方陣以外，把方陣最外面一層（包括上下左右四條邊上的數字）拿掉，仍是一個同心魔方陣。奇數階的同心魔方陣由一個三階魔方陣爲核心，如圖一所示。偶數階的同心方陣則由一個四階魔方陣做核心。

19	2	20	1	23
4	16	9	14	22
18	11	13	15	8
21	12	17	10	5
3	24	6	25	7

圖一

8	1	6
3	5	7
4	9	2

圖二

圖一的造法如下（可推廣到階數 n 爲任意奇數的情形）：先排出一個三階魔方陣如圖二所示作爲核心。再把核心方陣中每一數加上 $2(n-1)=2(5-1)=8$ 而成爲一個由 9 到 17 的九個連續整數排成的魔方陣，每行三個數之和爲 $(n-2)(n^2+1)/2$。這樣還剩下八對數字 1－25，2－24，3－23，4－22，5－21，6－20，7－19，8－18（其和爲 26，稱爲互補）可用來安排在外面一層上。由於每一對互補的數相加都是 26，所以只要把互補的數安排在同一排（直的或者橫的）及同一根對角線的兩端，則除了最外面四條邊以外每行每列及對角線上各數之和都是

$$(n^2+1)+(n-2)(n^2+1)/2=n(n^2+1)/2$$

現在先考慮奇數階同心魔方陣。先作一個 $n-2$ 階魔方陣放在中央，再把每一數加上 $2(n-1)$。例如要排一個五階方陣，可把圖二加上 8 外放在中央如圖三甲所示。

甲

	16	9	14	
	11	13	15	
	12	17	10	

乙

23				19
	16	9	14	
	11	13	15	
	12	17	10	
7				3

圖三

再把 $n^2-(n-1)/2=25-(5-1)/2=23$ 放在左上角，$n^2-3(n-1)/2=25-3(5-1)/2=19$ 放在右上角，互補的數則放在右下角及左下角，如圖三乙所示。

接下來排左邊及下面，至於右邊及上面一排只要填入和左邊及下面對應位置數字的互補數字即可。圖三乙中左邊一行及下面一排的空白可以用表一中 AB 兩組數字分別填入，表中 a，b，a'，b'，等符號

$$A\left\{\begin{array}{ll} n & \\ n^2-a & n+a \\ n^2-b & n+b \\ \vdots & \vdots \\ n^2-r & n+r \end{array}\right. \qquad B\left\{\begin{array}{ll} n^2 & \\ n^2-a' & n+a' \\ n^2-b' & n+b' \\ \vdots & \vdots \\ n^2-r' & n+r' \end{array}\right.$$

表一

可任意代入1，2，3，…，（$n-2$）除去（$n-1$）/2，每數只可用（亦必須用）一次。舉$n=5$為例，此時符號可用1及3代入，如果採用1代入A組，3代入B組，可得：（$a=1$，$a'=3$）

A：$n=5$，$n^2-a=25-1=24$，$n+a=5+1=6$

B：$n^2=25$，$n^2-a'=25-3=22$，$n+a'=5+3=8$

至於兩組數字填入空格時之次序則完全任意。所得結果如圖四所示。一般情形如圖五所示，圖中A^*代表和A互補的數。

23	1	4	18	19
5	16	9	14	21
24	11	13	15	2
6	12	17	10	20
7	25	22	8	3

圖　四

$n^2-(n-1)/2$	B^*	$n^2-3(n-1)/2$
A	$n-2$階魔方陣 $+2(n-1)$	A^*
$n+(n-1)/2$	B	$1+(n-1)/2$

圖　五

偶數階同心魔方陣的排列法略有不同，並視n是否為四的倍數而異，先設n為不能被四除盡的偶數，例如6。先把一個$n-2$階魔方陣放在核心，如圖六所示。再把n^2放在左上角，n放在左下角，互補的

n^2	D^*	n^2+1-n
C	$n-2$偶階魔方陣 $+2(n-1)$	C^*
n	D	1

圖　六

數則分別放在右下及右上角，如圖六所示。圖六中左及下兩條邊分別以C D兩組數字代入，C組包括（n^2-n-1），（n^2-n-3），（$n+3$），4及E組（見表二）。D組包括（n^2-1），

$$E\left\{\begin{array}{llll} n^2-a & n+a & n^2+1-n-p & 1+p \\ n^2-b & n+b & n^2+1-n-q & 1+q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-k & n+k & n^2+1-n-w & 1+w \end{array}\right.$$

表二

$$F\left\{\begin{array}{llll} n^2-a' & n+a' & n^2+1-n-p' & 1+p' \\ n^2-b' & n+b' & n^2+1-n-q' & 1+q' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-k' & n+k' & n^2+1-n-w' & 1+w' \\ n^2-x & & n^2+1-n-x & \end{array}\right.$$

表三

（n^2-2），（n^2-n），5及F組中除了最後二數之外的其他數字。表中a，b，a'，b'，等符號可代入由5到$n-2$的任何整數，但每數必須剛好出現一次。$n=6$時可得圖七。

36	2	3	7	32	31
29	26	13	12	23	8
27	15	20	21	18	10
9	19	16	17	22	28
4	14	25	24	11	33
6	35	34	30	5	1

圖　七

當n為四之倍數時，例如八，其普遍造法如圖八所示。此時E及F組中a，b，a'，b'，…，x等可取由0到$n-2$，但每數必須正好出現一次，而且必須滿足$2x=a+b$。請注意此時圖八中左方上下

n^2-b	F^*	$n^2+1-n-a$
E	$n-2$ 偶階魔方陣 $+2(n-1)$	E^*
$n+a$	F	$1+b$

圖 八

兩個角上的數也包括在 E 組內。以 $n=8$ 爲例，先作一個六階同心魔方陣爲核心方陣，如圖九所示，此核心方陣是把圖七加上十四而來。再令 $a=1$ ，$b=3$ ，$x=(1+3)/2=2$ ，$p=0$ ，$q=4$ ，$a'=5$ ，$p'=6$ 即得一八階同心方陣，如圖九所示。

61	3	10	6	52	14	58	56
63	50	16	17	21	46	45	2
11	43	40	27	26	37	22	54
57	41	29	34	35	32	24	8
53	23	33	30	31	36	42	12
1	18	28	39	38	25	47	64
5	20	49	48	44	19	15	60
9	62	55	59	13	51	7	4

圖 九

讀者不要以爲上述的方法是排出同心魔方陣的唯一方法。例如一個奇數階同心魔方陣中央的三階魔方陣可以如圖十所示代入任意的 a ，b ，但需滿足

$$a<b<(n^2+1)/2 \quad , \quad (n^2+1)/2<a+b$$

$$(n^2+1)/2 \neq (2b-a)$$

b	$[a-b]+[(n^2+1)/2]$	$[(n^2+1)-a]$
$[3(n^2+1)/2]-[a+b]$	$[(n^2+1)/2]$	$[a+b]-[(n^2+1)/2]$
a	$[b-a]+[(n^2+1)/2]$	$[(n^2+1)-b]$

圖 十

當取 $a=3$ ，$b=24$ ，及 $n=7$ 時由圖十可排出一個七階同心魔方陣，如圖十一所示。由圖十可以很容易

22	41	34	27	17	5	29
1	35	6	42	11	31	49
38	10	24	4	47	40	12
37	18	48	25	2	32	13
36	43	3	46	26	7	14
20	19	44	8	39	15	30
21	9	16	23	33	45	28

圖十一

證明這一類三階核心方陣的總數是

$(3n^4-26n^2+23)/48$ 　　若 $n/3\neq$ 整數

$(3n^4-26n^2+39)/48$ 　　其他情形

本文取材自*Benson*及*Jacoby* 合著的魔方陣新探(*New Recreations with Magic Sgaares*)，該書於一九七六由*Dover* 公司發行平裝本，約二百頁，原來定價美金四元，現在可能漲價，此書曾被*Gardner* 在「科學的美國人」雜誌上推薦。

——本文作者現任教於清大物理系