論述類

簡易線性代數 (五)

固有值與固有向量

賴漢卿

上一章我們曾經講到：有限維線性空間到有限維線性空間的線性變換，可用矩陣表現出來。特別情形在同一線性空間上的變換有坐標變換，顧名思義坐標變換只是基底的一種變換，對於向量本身並沒變動。本章我們要討論的變換是將一向量變成伸或縮的情形，但向量仍保持固有方向。這種情形，一般形式為

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

其中 λ 為純量（實數或複數），討論這種線性變換 A 所具有之特性乃轉移到式中之 λ 以及滿足此等式的向量 $\boldsymbol{x}$，此時 λ 稱為 A 的**固有值**，而 $\boldsymbol{x}$ 稱為對應於 λ 的**固有向量**。實質意義是因 $\boldsymbol{x}$ 經 A 變換後依舊保持原有向量之方向，其大小則由 λ 而決定。固有值在線性代數課題內具有其實質上的重要性。為計算矩陣之方便起見，乃導入所謂固有方程式之技巧以求固有值。本講義只在有限維空間討論。

§5－1 線性變換的固有向量

當我們考慮線性變換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ 時，對於不為0之向量 $\boldsymbol{x}$，若存在數 λ 滿足

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{5.1}$$

則稱 $\boldsymbol{x}$ 為此線性變換 A 的**固有向量**。此時的 λ 就對應此向量 $\boldsymbol{x}$，稱之為線性變換 A 的**固有值**。從這個定義，大家容易意味到固有向量 $\boldsymbol{x}$，經變換後的像 $\boldsymbol{y}$ 仍與 $\boldsymbol{x}$ 同在一直線上，固有值 λ 就是 $\boldsymbol{y}$ 對於 $\boldsymbol{x}$ 的比。

有一個很重要的事實：若 $\boldsymbol{x}$ 為一線性變換的固有向量，則與 $\boldsymbol{x}$ 同在一直線上的非0向量，仍然是這一個線性變換的固有向量，此固有值與 $\boldsymbol{x}$ 的固有值相等。

實際上若 $\boldsymbol{x}^*$ 與 $\boldsymbol{x}$ 同在一直線上，則有 $\boldsymbol{x}^* = \alpha \boldsymbol{x}$，因而由變換 A，乃變形為

$$A\boldsymbol{x}^* = A(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x} = \alpha(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}^*$$

即 $A\boldsymbol{x}^* = \lambda \boldsymbol{x}^*$，表示 $\boldsymbol{x}^*$ 的固有值也是 λ。

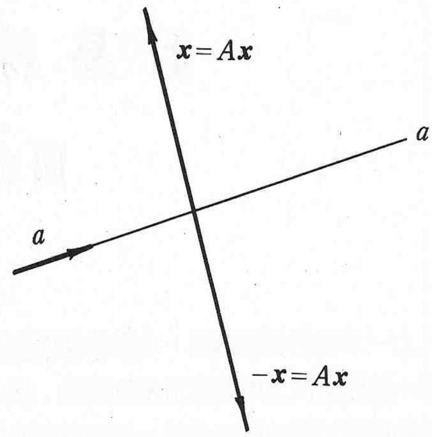
故對應於固有值 λ 的固有向量之全體（都在同一直線上）形成一個線性子空間，此子空間一般稱之為對應於 λ 的**固有（線性）空間**。

下面我們來觀察關於線性變換之固有值與固有向量之一些概念。

例1：$A\boldsymbol{x}$ 若依相似比 k 擴大時，對於此變換之非零向量都是固有向量，而 k 就是其固有值。

例2：若 $A\boldsymbol{x}$ 為廻轉一個角度 α 的變換，$0 < \alpha < \pi$，則 $A\boldsymbol{x}$ 就沒有固有向量，蓋因非0之像與原像不會在一直線上。如果 $\alpha = 0$ 則 $A\boldsymbol{x}$ 為恒等變換（廻轉角度為0），則所有非0向量為固有向量且其固有值為1。$\alpha = \pi$ 時 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$，則所有非0向量都是固有向量，其固有值為－1。

例3：若$A\boldsymbol{x}$爲關於直線a的對稱移動，則固有向量是與在a上的向量垂直之向量，其固有值爲1與－1。



今設$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$爲平面上的線性變換，並設此變換具有非在同一直線上之兩個固有向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，與此固有向量對應的固有值分別爲λ_1，λ_2。則因$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$不在同一直線上，所以可取做2爲空間的基底。關於此基底向量的坐標表示，可依下面方式求之。

設$\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$爲$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$在變換A下的像，則

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = A\,\boldsymbol{e}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2' = A\,\boldsymbol{e}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

故

$$(5.2) \qquad A^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A$$

因此以固有向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$爲基底的線性變換爲一對角線矩陣，此對角線元素爲$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$的固有值，其對應的坐標表示爲

$$(5.3) \qquad \begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \qquad \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

若$\lambda_1=\lambda_2$，以λ表此值，則（5.3）爲

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1 \\ y_2 &= \qquad \lambda x_2 \end{aligned}$$

上式是相似比λ的擴大。也就是說平面上之所有向量都是λ的固有向量。

如果$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$視爲3維空間上的線性變換，則仍與2維所討論的情形一樣，必定具有不在同一平面上之三個固有向量，而與此固有向量對應的固有值分別爲λ_1，λ_2，λ_3。此時如同前段關於基底$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$爲固有向量之變換A，就成爲對角線矩陣，其對角線元素就是固有值λ_1，λ_2，λ_3，即

$$(5.4) \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

故線性變換的坐標表示爲

$$(5.5) \qquad \begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \qquad \lambda_2 x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad \lambda_3 x_3 \end{cases}$$

特別於$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$時上式爲

$$\begin{cases} y_1 = \lambda x_1 \\ y_2 = \qquad \lambda x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad \lambda x_3 \end{cases}$$

這個λ表示此變換的相似比之相似擴大。故在3維空間中，所有向量都以λ爲固有值的固有向量。

由上述性質我們知道在線性變換的理論上，與固有向量及固有值有很密切的關係。以固有向量做基底之向量若存在，則關於此基底的線性變換之坐標表示式，就格外簡單，蓋因由此固有值就完全決定了所要的線性變換。

§5－2　矩陣的特徵方程式

我們提過在有限維線性空間討論時，線性變換都能用矩陣表現出來。本節就特別在一般平面及空間上來看如何求線性變換的固有值。

先設 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 爲平面上的線性變換，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 爲基底向量，設一線性變換 A 關於基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的坐標表示爲：

$$(5.6)\qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

即
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

設 $\boldsymbol{e}=(l, m)$ 是關於 A 的固有值 λ 之固有向量，即

$$(5.7)\qquad A\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}$$

這個向量方程式事實上與下面聯立方程式等價

$$(5.8)\qquad \begin{cases} a_{11}l + a_{12}m = \lambda l \\ a_{21}l + a_{22}m = \lambda m \end{cases}$$

上式變化成

$$(5.9)\qquad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)l + a_{12}m = 0 \\ a_{21}l + (a_{22}-\lambda)m = 0 \end{cases}$$

（5.9）有異於 0 之解，$\boldsymbol{e}=(l, m)$，則其係數行列式應爲 0 。

即

$$(5.10)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

因此所有固有值必須滿足（5.10），反之滿足（5.10）之 λ 必可使（5.9）有異於 0 向量解 $\boldsymbol{e}=(l, m)$。故此 λ 與 $\boldsymbol{e}$ 滿足（5.7）是容易看出來的事實。像這樣由（5.10）解出的 λ 爲固有值，其對應的固有向量乃由（5.9）來決定。

（5.10）是關於 λ 的一（2次）多項式，稱之爲矩陣 A 的**特徵方程式**或**固有方程式**。

例 4：設 $0<\alpha<\pi$，試求變換：

$$\begin{cases} y_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ y_2 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{cases}$$

的固有向量。

解：其特徵方程式爲

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即　$\lambda^2 - 2\lambda\cos\lambda + 1 = 0$

故 $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$。　$\cos^2\alpha < 1$ （因 $0<\alpha<\pi$），故特性方程式無實根，故本題所給的變換無固有向量（參照第 4 章末乃知這是一個廻轉角度 α 的變換，參考§5－1的例 2）。

例 5：試求下面線性變換的固有向量

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

解：固有方程式爲

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

所以$(\lambda-1)^2=0$，$\lambda=1$。於是(5.9)爲

$$(1-\lambda)l+m=0$$
$$(1-\lambda)m=0$$

若$\lambda=1$，令$m=0$，則變換的固有向量爲$(l,0)$。這就是坐標軸上的點。

再來我們看3維空間的情形。線性變換$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$關於基底向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$的矩陣表現設爲

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

則如同在平面上所討論的一樣，A的固有值就是下面特徵方程式的根：

$$(5.11)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

也就是λ爲使下面連立一次齊次方程組：

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)l &+ a_{12}m &+ a_{13}n &= 0 \\ a_{21}l &+ (a_{22}-\lambda)m &+ a_{23}n &= 0 \\ a_{31}l &+ a_{31}m &+ (a_{33}-\lambda)n &= 0 \end{aligned}$$

有異於0之解(l,m,n)。設$\boldsymbol{e}=(l,m,n)$，則λ爲關於固有向量$\boldsymbol{e}$的固有值。

同樣的(5.11)稱爲線性變換A的**固有(或特徵)方程式**。

一般對於n維空間而言，線性變換A的特徵(固有)方程式爲：

$$|A-\lambda I|=0$$

$|A-\lambda I|$ 稱爲**特徵(或固有)多項式**。關於特徵多項式有下面之基本定理。

定理5・1　有限維線性變換的特徵多項式與所選之基底無關。

證明：以2維的情形來證明已足夠。

設關於基底向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$的線性變換之矩陣表示爲A，而關於另一基底向量$\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$的線性變換之矩陣表示爲$\widetilde{A}$時，則如第4章坐標變換(§4－2，§4－3)知

$$\widetilde{A}=(L^t)^{-1}AL^t$$

或

$$I=(L^t)^{-1}IL^t$$

此處L表變換基底的矩陣表示，因此

$$\widetilde{A}-\lambda I=(L^t)^{-1}(A-\lambda I)L^t\ ,$$

其行列式爲

$$|\widetilde{A}-\lambda I| = |(L^t)^{-1}|\ |A-\lambda I|\ |L^t| = |A-\lambda I|$$

蓋因　$|(L^t)^{-1}|\ |L^t| = |(L^t)^{-1}L^t| = |I| = 1$

故定理的結果　$|\widetilde{A}-\lambda I| = |A-\lambda I|$　　已證明了。

例6：求下列矩陣的固有值及固有向量

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

解：

(1) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$，解之得　$\lambda=-2$　或　$\lambda=4$

當 $\lambda=-2$ 時，解聯立方程式

$$\begin{cases} 3x_1-3x_2=0 \\ -3x_1+3x_2=0 \end{cases}，\quad 得 \quad x_1=x_2=c_1 \quad（任意常數）$$

當 $\lambda=4$ 時，解聯立方程式

$$\begin{cases} -3x_1-3x_2=0 \\ -3x_1-3x_2=0 \end{cases}，\quad 得 \quad x_1=-x_2=c_2 \quad（任意常數）$$

答：　$\lambda=-2$，其對應的固有向量爲 $c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=4$，其對應的固有向量爲 $c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，此處 c_1 與 c_2 爲任意常數。

(2)由 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$，解得　$\lambda=0,1,3$

當 $\lambda=0$ 時，
$$\left.\begin{array}{r} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \\ -x_1-x_2+2x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=x_2=x_3=c_1$$

當 $\lambda=1$ 時，
$$\left.\begin{array}{r} -x_3=0 \\ -x_1-x_2+2x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=-x_2=c_2，x_3=0$$

當 $\lambda=3$ 時，
$$\left.\begin{array}{r} -2x_1-x_3=0 \\ -2x_2-x_3=0 \\ -x_1-x_2-x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=x_2=c_3，x_3=-2c_3$$

答：$\lambda=0$，$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；$\lambda=1$，$c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；$\lambda=3$，$c_3\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

c_1，c_2，c_3　爲任意常數。

(3)由 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & 0-\lambda \end{vmatrix}=0$，　得　$(\lambda-3)^2(\lambda+3)=0$，$\lambda=3$（二重根），$\lambda=-3$

當 $\lambda=3$ 時，
$$\left.\begin{array}{r} -2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ 3x_1-3x_2-3x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1=c_1+c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=c_2 \end{cases}$$

當 $\lambda=-3$ 時，
$$\left.\begin{array}{r} 4x_1+2x_2+2x_3=0 \\ x_1+5x_2-x_3=0 \\ 3x_1-3x_2+3x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_3 \\ x_2=c_3 \\ x_3=3c_3 \end{cases}$$

答：
$$\begin{cases} \lambda=3，固有向量爲\ c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}； \\ \lambda=-3，固有向量爲\ c_3\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}，c_1，c_2，c_3\ 爲任意常數。 \end{cases}$$

一般如設線性變換的矩陣表示爲A，且關於同一基底之行向量$\boldsymbol{x}$爲A的固有向量時，其對應的固有值若爲λ，則

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \qquad \text{或} \qquad (A-\lambda)\boldsymbol{x}=0$$

寫成聯立方程組爲

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases}$$

其特徵方程式爲

$$\begin{vmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & (a_{nn}-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

例7：求下面矩陣的固有值及固有向量

(1) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & 0 & 1 & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & 0 & & & 0\end{pmatrix}$，(2) $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & & 0\\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots\cdots & & 0\end{pmatrix}$

解：(1)固有方程式爲 $\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)^n=0$

故固有值爲0，其固有向量若寫作$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，則 $A\boldsymbol{x}=0\cdot\boldsymbol{x}=0=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

但 $A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\\ 0\end{pmatrix}$，故 $x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n=0$，而$x_1$爲任意數$\lambda$，

因此固有向量爲 $(\lambda,0,0,\cdots\ 0)^t$ （λ爲任意數）。

(2)固有方程式爲 $\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & & 0\\ 0 & -\lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)^n-(-1)^n=0$

所以 $\lambda^n=1$，其解就是1的n個n次方根，若以ω_n表非1而$\omega_n^n=1$者，則λ的所有根爲：

$$1,\ \omega_n,\ \omega_n^2,\ \cdots\cdots,\ \omega_n^{n-1}$$

這些都是B的固有值，設對應於其固有值ω_n^i的固有向量爲$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots\cdots,x_n)^t$，則因

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \omega_n{}^i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \left(= \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{bmatrix} \right)$$

但上式左邊爲 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$，故

$$x_2 = \omega_n{}^i x_1 \quad , \quad x_3 = \omega_n{}^i x_2 = \omega_n{}^{i+1} x_1 , \cdots\cdots , x_n = \omega_n{}^{i+n-1} x_1$$

因此所求得的固有向量爲

$$x_1 \; (1 , \omega_n{}^i , \omega_n{}^{i+1} , \cdots\cdots , \omega_n{}^{i+n-1})^t ,$$

x_1 可以爲任意常數。

注意：根據代數基本定理，n次多項式就應有n個根。但實係數多項式的情形，可能全部或一部分的根爲虛數。因此對於線性變換並沒有所謂實數固有值及固有向量的存在定理。就如例2，例4所看到的，在原點旋轉小於180°的廻轉角時，這種變換乃把平面上所有向量改變了方向，故不會存在固有向量。

§5－3　矩陣的對角線化

如果一線性變換A的固有值都相異，則可將該變換的矩陣表現，化成相似的對角線矩陣，使對角線各元素爲A的固有值。首先看下面定理：

定理5・2　在線性變換A之各相異固有值所對應的固有向量中，各取一固有向量所成的固有向量系是線性獨立。

證明：先注意到一個固有值可能對應許多固有向量，這些固有向量形成一線性空間，我們在前面給它一個名稱爲固有空間，現在定理的意思是在不同固有值所對應的固有空間中分別取出一固有向量，則成爲線性獨立的固有向量系。

下面我們用矛盾法來證明；設在n個相異的固有值中，只有k個所對應的固有向量e_1，e_2，…，e_k 爲線性獨立，其餘（$n-k$個）之固有向量爲這些向量的線性結合。設e_{k+1}就是其中的一個，即

$$e_{k+1} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots\cdots + c_k e_k$$

兩邊以變換A作用之：

(1)　$A e_{k+1} = c_1 A e_1 + c_2 A e_2 + \cdots\cdots + c_k A e_k$

則由固有向量的定義

(2)　$\lambda_{k+1} e_{k+1} = c_1 \lambda_1 e_1 + c_2 \lambda_2 e_2 + \cdots\cdots + c_k \lambda_k e_k$

以λ_{k+1}乘(1)式各項與(2)式相減得

$$c_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) e_1 + c_2 (\lambda_{k+1} - \lambda_2) e_2 + \cdots + c_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) e_k = 0$$

但 e_1，e_2，…，e_k 爲線性獨立，且 λ_{k+1} 異於 λ_1，λ_2，…，λ_k，因此由各係數爲 0 的結果就導出

$$c_1 = c_2 = \cdots\cdots = c_k = 0$$

這是與(1)矛盾的現象。換句話說這種 e_{k+1} 不存在，即 k 應該等於 n，定理也因而證明了。

由這個定理我們知道若 A 的固有值都不相同，則在各固有值所對應的固有向量中分別取一固有向量，就可構成空間的一基底，其個數恰等於空間的維度。要是設這些固有向量爲 e_i（$i = 1, 2, \cdots, n$），則

$$A e_i = \lambda_i e_i \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n),$$

於是 A 就變成對角線矩陣了。由這樣的推論就等於證明了下面這個定理。

定理 5・3　若線性變換之矩陣表示的固有值都不相等，則可將此矩陣化成相似的對角線矩陣，使對角線上各元素爲此變換的固有值。

註： 兩矩陣 A，B 相似的意思是存在一非奇異（即正則）矩陣使

$$B = C^{-1} A C$$

通常寫作 $B \sim A$。相似矩陣的例子可參照第四章坐標變換中所寫 $\widetilde{A} = (L^t)^{-1} A L^t$。$A$ 與 $\widetilde{A}$ 就是相似矩陣。

如果固有方程式的根有相等的情形，而線性變換的矩陣想化成最簡單之變形的問題，則須一相當複雜的過程。此時並不一定能化成對角線型的矩陣。但以接近對角線矩陣爲目標，則有下面著名的 **Jordan** 定理（俗稱 **Jordan 標準形**）。

定理 5・4　對 n 階矩陣 A，必存在某適當的正則矩陣 P，使

$$(5.12) \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & A_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

此處 $k_1 + k_2 + \cdots\cdots + k_r = n$，且 $A_k(\lambda)$ 爲 $k \times k$ 型矩陣。
$A_1(\lambda) = \lambda$，A_i 爲 A 的固有值，每個固有值都是固有方程式的 k_i 重根（$k_i = 1$ 表單根）。且

$$(5.13) \qquad A_{k_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

證明：（略）

註 1： 本節所講的矩陣，事實上都是方陣，我們不在此明顯記出方陣，但依題意當可意會是方陣。
註 2： 這個定理 5・4，我想只要記得並相信這個結果成立，而會用就已足夠。讀者注意到求變換 A 的固有值時，先有固有方程式

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

這個方程式可分解成$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_r}$，$k_1$，$k_2$，……，$k_r$ 是λ_1，λ_2，…，λ_r 的重複度，事實上各k_i 是固有值λ_i 所對應固有空間的維度。此時A可以化成（5．12）之對角線矩陣，不過對角線元素還是矩陣，那是由（5．13）所決定的矩陣。

§5－4　矩陣函數

線性代數應用到數學以外的部門非常多。如理論物理學，線性規劃等。不管如何，線性代數之思想與結果，總是以矩陣運算之形式爲主。本節所介紹的矩陣算是爲易於觀察，把矩陣當做變數看待，而導入矩陣函數，這個方法常用到常微分方程式上。目前我們不預備講那麼多，就暫時保留其應用。

下面所談的矩陣也都屬方陣。故依方陣之乘法，我們可定義其乘羃，如

$$A^0=I\ ,\ A^2=AA\ ,\ A^3=A^2A\ ,\ \cdots\ ,\ A^n=A^{n-1}A \quad 等$$

若m，n爲任意自然數，則易證明

$$A^mA^n=A^{m+n}\quad。$$

因此在單變數多項式的表示式，也就易推廣到以矩陣爲變數的單變數函數來；即

$$\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

就可用來定義

$$\varphi(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots\cdots+a_nI$$

關於矩陣的多項式之固有值有**Frobenius** 所證明的重要定理如下：

定理5．5　設$n\times n$方陣$A=(a_{ij})$ 之固有值爲λ_1，λ_2，…，λ_n 。關於x之整式

$$\varphi(x)=p_0x^m+p_1x^{m-1}+\cdots+p_{m-1}x+p_m \quad (m\geq 1\ ,\ p_0\neq 0)$$

以方陣A代入$\varphi(x)$的n，則

$$\varphi(A)=p_0A^m+p_1A^{m-1}+\cdots+p_{m-1}A+p_mI$$

之固有值爲

$$\varphi(\lambda_1)\ ,\ \varphi(\lambda_2)\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ \varphi(\lambda_m)$$

證明： 置　$f(\lambda)=|A-\lambda I|$ ，則

$$f(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
$$=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

此時對於$\varphi(A)$而言，只要能證明

$$|\varphi(A)-\lambda I|=\{\varphi(\lambda_1)-\lambda\}\{\varphi(\lambda_2)-\lambda\}\cdots\{\varphi(\lambda_m)-\lambda\}$$

即可。

於此設　$\varphi(x)-\lambda=0$ 的根爲α_1，α_2，……，α_m ，則

$$\varphi(x)-\lambda=p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$$

利用根與係數的關係得

$$p_1/p_0=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\ ;\ p_2/p_0=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\ ,\quad (p_m-\lambda)/p_0=(-1)^m\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$$

所以

$$\varphi(A)-\lambda I=p_0A^m+p_1A^{m-1}+\cdots+p_{m-1}A+p_mI-\lambda I$$
$$=p_0(A-\alpha_1I)(A-\alpha_2I)\cdots(A-\alpha_mI)$$

一般對於 n 階方陣 $B=(b_{ij})$，$kB=(kb_{ij})$，因此行列式之值為 $|kB|=k^n|B|$，故

$$
\begin{aligned}
|\varphi(A)-\lambda I| &= p_0^n|A-\alpha_1 I||A-\alpha_2 I|\cdots\cdots|A-\alpha_m I|\\
&= p_0^n f(\alpha_1)f(\alpha_2)\cdots\cdots f(\alpha_m)\\
&= p_0^n(\lambda_1-\alpha_1)(\lambda_2-\alpha_1)\cdots\cdots(\lambda_n-\alpha_1)\\
&\quad\times(\lambda_1-\alpha_2)(\lambda_2-\alpha_2)\cdots\cdots(\lambda_n-\alpha_2)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad\times(\lambda_1-\alpha_m)(\lambda_2-\alpha_m)\cdots\cdots(\lambda_n-\alpha_m)\\
&= p_0(\lambda_1-\alpha_1)(\lambda_1-\alpha_2)\cdots\cdots(\lambda_1-\alpha_m)\\
&\quad\times p_0(\lambda_2-\alpha_1)(\lambda_2-\alpha_2)\cdots\cdots(\lambda_2-\alpha_m)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad\times p_0(\lambda_n-\alpha_1)(\lambda_n-\alpha_2)\cdots\cdots(\lambda_n-\alpha_m)\\
&= \{\varphi(\lambda_1)-\lambda\}\{\varphi(\lambda_2)-\lambda\}\cdots\cdots\{\varphi(\lambda_n)-\lambda\}\quad,
\end{aligned}
$$

於是 $\varphi(A)$ 的固有值為 $\varphi(\lambda_1)$，$\varphi(\lambda_2)$，$\cdots\cdots$，$\varphi(\lambda_n)$ 已證明。

另有一定理稱為 **Caley - Hamilton** 定理

定理 5・6　設線性變換矩陣 A 的固有多項式為 $f(\lambda)$，則

$$f(A)=0$$

證明：設 $|A-\lambda I|=f(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)$，$|A-\lambda I|$ 之餘因式所成之矩陣為 $adj(A-\lambda I)$，則

$$(A-\lambda I)\,adj(A-\lambda I)=|A-\lambda I|\,I$$

（參照在逆矩陣求法時所用餘因式之公式：　$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(adj\,A)$）

此處因 $adj(A-\lambda I)$ 之各元素為 $A-\lambda I$ 之 $(n-1)$ 階小行列式，所以為 λ 的 $n-1$ 次整式。於是依 λ 之同次項整理便可寫作：

$$adj(A-\lambda I)=(-1)^{n-1}(A_1\lambda^{n-1}+A_2\lambda^{n-2}+\cdots+A_n),$$

其中 A_r 為 λ^{n-r} 的係數所集成的矩陣，這是 n 階方陣。

所以

$$
\begin{aligned}
&(A-\lambda I)(A_1\lambda^{n-1}+A_2\lambda^{n-2}+\cdots+A_{n-1}\lambda+A_n)(-1)^{n-1}\\
&=(-1)^n(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n)I
\end{aligned}
$$

比較 λ 的同次冪係數得

$$
\begin{aligned}
&A_1=I\ ,\ A_2-AA_1=a_1 I\ ,\ A_3-AA_2=a_2 I\ ,\ \cdots\cdots\ ,\\
&A_{k+1}-AA_k=a_k I\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ -AA_n=a_n I
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
f(A) &= (-1)^n\{A^n+a_1 IA^{n-1}+a_2 IA^{n-2}+\cdots+a_{n-1}IA+a_n I\}\\
&= (-1)^n\{A^n+A^{n-1}(A_2-AA_1)+A^{n-2}(A_3-AA_2)+\cdots\cdots\\
&\quad +A^{n-k+1}(A_k-AA_{k-1})+\cdots+A(A_n-AA_{n-1})-AA_n\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

即　$f(A)=0$。

例 8：(1)求下面矩陣 A 的固有值，並求 A^2　。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

(2)將 $B=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_3&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_1\end{bmatrix}$ 用(1)之 A，A^2，I 表示出來。

(3)用 Frobenius 定理求矩陣 B 之固有值。

解：A 的特徵方程式為：

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

解之得 $\lambda=1$，$(-1\pm\sqrt{3}\,i)/2$

又 $$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

所以 $B=a_1I+a_2A+a_3A^2$

於此令 $\varphi(x)=a_3x^2+a_2x+a_1$，且 $\omega=(-1+\sqrt{3}\,i)/2$，則

$\omega^2=(-1-\sqrt{3}\,i)/2$ 因此 $\varphi(A)=B$ 的固有值為

$$\varphi(1)=a_1+a_2+a_3$$

$$\varphi(\omega)=a_1+a_2\omega+a_3\omega^2$$

$$\varphi(\omega^2)=a_1+a_2\omega^2+a_3\omega$$

例 9：設

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&-1\\1&5&0\end{pmatrix}$$

(1)求 $A^4-3A^3+15A-9I$，　(2)求 A 的逆矩陣 A^{-1}

解：令

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\0&3-\lambda&-1\\1&5&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

則 $f(\lambda)=-\lambda^3+5\lambda^2-10\lambda+7=0$，

$$f(A)=-A^3+5A^2-10A+7I=0$$

(1) $A^4-3A^3+15A-9I$

$=(A+2)(A^3-5A^2+10A-7I)+2A+5I=2A+5I$

$$=2\times\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&-1\\1&5&0\end{pmatrix}+5\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&2\\0&11&-2\\2&10&5\end{pmatrix}$$

(2)由 $f(A)=0$ 得 $A(A^2-5A+10I)=7I$，

故 $A(A^2-5A+10I)/7=I$

即 $$A^{-1}=\frac{1}{7}(A^2-5A+10I)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&5&-3\\-1&-1&2\\-3&-10&6\end{pmatrix}$$

以矩陣爲變數之函數概念也可導入極限的概念。因此可從多項式形式推廣到更爲廣泛的函數。這種問題更一般化則爲泛函分析的理論了。在本節的末了這一段，初學者可略去，但有（讀過微積分）的讀者會感興趣，因此我還是附帶的稍作說明與介紹。

先導入無限方陣系列之極限概念：設有方陣系列

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots$$

對於任意 (i, j) 元素，若 $\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$ 存在時，則稱上面之矩陣系列收斂到

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

而記爲

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k$$

更進一層的，若 $\lim_{k\to\infty}(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)$ 存在時，稱此極限爲矩陣級數 $A_1 + A_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 之和。這種級數也可推廣到冪級數上來定義。先設 $f(Z)$ 爲在 $Z=0$ 的近傍可微分（任何次），則 $f(Z)$ 可寫成冪級數

$$f(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots\cdots + a_k Z^k + \cdots\cdots$$

（不明可微分之讀者，就設 $f(Z)$ 爲上述之級數在某範圍（收斂圓）內收斂）

則對任意方陣 A 很自然的可定義爲

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k + \cdots\cdots$$

在應用上，以方陣爲變數表現初等函數者，更有其基本的重要性，如等比級數，公比小於1，其級數和的公式爲：

$$1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^k + \cdots\cdots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

這就與等比級數

$$I + A + A^2 + \cdots\cdots + A^k + \cdots\cdots = (I - A)^{-1}$$

之固有值的絕對值小於1的收斂方陣級數相對應（可這樣講法，請參照Celey-Hamilton定理5·6的意思）。

反之如果 $(I-A)^{-1}$ 能用一無限級數形式表示的話。在求聯立一次方程組之近似解時，只要其係數方陣 A 近於單位方陣，則給了一甚有效的求近似解方法。

事實上，聯立一次方程組可寫作

$$(I - A)X = B$$

其中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ 爲未知向量，$B = (b_1, \cdots, b_n)^t$ 爲已知向量，則求 X 可用

$$X = (I - A)^{-1} B = B + AB + A^2 B + \cdots\cdots$$

求得，這個無限級數要是收斂得快，則很方便求得聯立方程式的近似解。

在二項級數中，我們對矩陣形式也稍作分析：

$$(I + A)^m = I + \frac{m}{1!} A + \frac{m(m-1)}{2!} A^2 + \cdots\cdots$$

m 若爲自然數，上式表一有限級數，但若 A 的固有值之絕對值小於1，則 m 不是整數而爲其他有理數時，也可適用。

在應用上特別重要的是指數函數

$$e^{A} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots$$

定義指數函數的級數是對任意方陣A都是收斂。方陣之指數函數與通常的指數函數，具有相同的性質。例如下面定理

定理 5・7　設A與B爲可換的兩方陣，即$AB = BA$，則

$$e^{A} \cdot e^{B} = e^{A+B}$$

證明：因 $e^{A} = I + \dfrac{A}{1!} + \dfrac{A^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots$

$$e^{B} = I + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots$$

爲絕對收斂，且可變換項的順序，故

$$e^{B} = \left(I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots\cdots\right)\left(I + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \cdots\cdots\right)$$

$$I + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A^2 + 2AB + B^2)}{2!} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= I + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{(A+B)^n}{n!} + \cdots\cdots$$

$$= e^{A+B}$$

注意：A與B不可換，則上式不成立。

練 習 題

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，則$AB \neq BA$。試證明

 (1) $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$

 (2) $e^{At} \cdot e^{Bt} \neq e^{Bt} \cdot e^{At} \neq e^{(A+B)t}$，但$t$都表實數。

2. 求下列各矩陣的固有值及固有向量。

 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

3. 試證明一方陣之轉置與原方陣具有相同的固有值。

4. 方陣A爲正則，與其不含 0 的固有值等價。

5. 求以± 1爲固有值之 2 階方陣。

6. 設L爲 3 階的正規直交方陣（即L爲直交矩陣且$|L| = 1$），則$\lambda = 1$爲L的固有值。更有進者若$\lambda = -1$也是L的固有值，則-1必定是其 2 重根的固有值。

7. 設$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，求$A^4 - 5A^3 + 6A^2 + 6A - 8I$ 以及A^{-1}

8. 若$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 試求(1) $3A$的固有值，(2) $-2A^2$ 的固有值，(3) $A^2 - 2A + 4I$ 的固有值，(4) A^{-1}

9. 一個3階矩陣A的固有值爲1，－1，2時，試將A^6以A的2次式來表示。

10. 設$A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ （$0<a<1$），則$n\to\infty$時A^n趨近於什麼矩陣？

11. 若λ爲A的固有值，則$\lambda^2+\lambda$爲A^2+A的固有值。

12. 設A，B爲同階方陣，試證明AB的固有值爲BA的固有值。

略解：

1. (1) e^{At}及e^{Bt}依t展成冪級數，則

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots\cdots=I+At=\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$e^{Bt}=I+Bt+\frac{B^2}{2!}t^2+\cdots\cdots=I+Bt=\begin{bmatrix}1 & 0\\t & 1\end{bmatrix}$$

蓋因$A^k=0$，$B^k=0$，$k=2,3,\cdots\cdots$

(2) $$e^{At}\cdot e^{Bt}=\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\t & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+t^2 & t\\t & 1\end{bmatrix}$$

但 $$e^{Bt}\cdot e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0\\t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & t\\t & 1+t^2\end{bmatrix}$$

而 $$A+B=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=J$$

$$\begin{aligned}e^{(A+B)t}&=I+(A+B)t+\frac{(A+B)^2}{2!}t^2+\cdots\cdots\\&=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{t^2}{2}+\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\frac{t^3}{3!}+\cdots\cdots\\&=I\left(1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\right)+J\left(t+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots\cdots\right)\\&=(\cosh t)I+(\sinh t)J\\&=\begin{bmatrix}\cosh t & \sinh t\\\sinh t & \cosh t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

這一部分的表示法是爲讀過微積分的人而寫的

故 $e^{At}\cdot e^{Bt}\neq e^{Bt}\cdot e^{At}\neq e^{(A+B)t}$

2. (1) $\lambda=1$，$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；$\lambda=2$，$c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；$\lambda=3$，$c_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

(2) $\lambda=2$，$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；$\lambda=-1$（二重根），$c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) ① $\alpha\neq\beta\neq\gamma$時，$\lambda=\alpha$，$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；$\lambda=\beta$，$c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$；$\lambda=\gamma$，$c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

② $\alpha\neq\beta=\gamma$時，$\lambda=\alpha$，$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\lambda=\beta\ (=\gamma)$，$c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

③ $\alpha=\beta\neq\gamma$ 時，$\lambda=\alpha\ (=\beta)$，$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ；$\lambda=\gamma$，$c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

④ $\alpha=\gamma\neq\beta$ 時，$\lambda=\alpha\ (=\gamma)$，$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ；$\lambda=\beta$，$c_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

⑤ $\alpha=\beta=\gamma$ 時，則非 0 之 3 維向量都是固有向量。

3. $|A^t-\lambda I|=|(A^t-\lambda I)^t|=|A-\lambda I|$

4. 若 A 爲正則，則 A^{-1} 必存在。對於 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ ($x\neq 0$) 則 $\mathbf{x}=\lambda A^{-1}\mathbf{x}\neq 0$ ，於是 $\lambda\neq 0$ 。
若 A 不爲正則，則 A^{-1} 不存在。於是 $|A|=0$，於是 $A\mathbf{x}=0$ 之解有異於 0 之解，取此解 x，則 $A\mathbf{x}=0=\mathbf{x}$，即 A 有固有值 0 。

5. 設 $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$

若 ± 1 爲其固有值上式必 $=\lambda^2-1=0$ ，因此

$$a+b=d\quad,\quad ad-bc=1\quad。$$

當 $b\neq 0$ 時， $\begin{bmatrix}a & b\\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a\end{bmatrix}$ 爲所求之方陣

當 $b=0$ 時， $\begin{bmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ c & 1\end{bmatrix}$ 爲所求之方陣

6. 只要證明 $|L-I|=0$ 即可。因 $|L|=1$，所以

$$|L-I|=|(L-I)^t|=|L(L-I)^t|=|L(L^t-I)|=|LL^t-L|=|I-L|,$$

此處 $LL^t=I$ 是因 L 爲 3 階直交方陣。於是

$$|I-L|=|-(L-I)|=-|L-I|\qquad(因階數爲奇數 3)$$

所以 $|L-I|=-|L-I|$， 即 $|L-I|=0$，

其次設 1，-1，α 爲 L 的固有值，由根與係數的關係得

$$1\cdot(-1)\alpha=|L|=1\qquad 即\quad \alpha=-1$$

故 -1 爲 2 重根。

7. $|A-\lambda I|=\lambda^2-5\lambda+7$

$$A^4-5A^3+6A^2+6A-8I=(A^2-5A+7I)(A^2-I)+A-I$$
$$=A-I=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

8. $|A-\lambda I|=-(\lambda^3-\lambda^2-4\lambda+4)=0\Rightarrow\lambda=1,2,-2$

(1)利用 Frobnius 定理 3 A 的固有值爲 3，6，-6。

(2) -2×1^2，-2×2^2，$-2\times(-2)^2$

(3)令 $\varphi(x)=x^2-2x+4$，則 $\varphi(1)$，$\varphi(2)$，$\varphi(3)$ 就是所求之固有值。

(4) $|A-\lambda I|=f(\lambda)=0$ ， $f(A)=0$

所以 $A^3-A^2-4A+4I=0$ ， 於是 $4I=A(4I+A-A^2)$

因此 $A^{-1}=\dfrac{1}{4}(4I+A-A^2)=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

9. 設A的固有方程式爲 $f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=0$

即 $f(A)=A^3-2A^2-A+2I=0$, $A^3=2A^2+A-2I$

$$\begin{aligned} A^6=A^3\cdot A^3&=(2A^2+A-2I)(2A^2+A-2I)\\ &=4A^4+4A^3-7A^2-4A+4I\\ &=4A(2A^2+A-2I)+4A^3-7A^2-4A+4I\\ &=9A^3-3A^2-12A+4I\\ &=9(2A^2+A-2I)-3A^2-12A+4I\\ &=15A^2-3A-14I \end{aligned}$$

10. A的固有值爲 1,$2a-1$ 其對應的固有向量爲 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

即 $(1,1)A=(1,1)$, $(1,-1)A=(2a-1)(1,-1)$

今設 $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$ 則

$$\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n+b_n\\ c_n+d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 1-a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

於是 $a_n+b_n=1$, $c_n+d_n=1$

又 $$\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n-b_n\\ c_n-d_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=(2a-1)^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

因 $-1<2a-1<1$,所以 $(2a-1)^n\to 0$,即 $a_n-b_n\to 0$, $c_n-d_n\to 0$

結果 $a_\infty=b_\infty=c_\infty=d_\infty=\dfrac{1}{2}$

即 $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\longrightarrow\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

11. 設 $Ax=\lambda x$ $(x\neq 0)$,

$(A^2+A)x=A\cdot Ax+Ax=A(\lambda x)+\lambda x=\lambda Ax+\lambda x=(\lambda^2+\lambda)x$

故 $\lambda^2+\lambda$ 爲 A^2+A 的固有值

12. 設 $ABx=\lambda x$ $(x\neq 0)$, $Bx\neq 0$ 時

$BA\cdot Bx=B\cdot ABx=\lambda Bx$,即λ爲BA的固有值。

若$Bx=0$,則$\lambda=0$,$|B|=0$,因此$|AB|=0$,這也示明AB及BA都是以0爲其固有值

※下一次講「對稱線性變換」

——本文作者現任教於清大數學系