$$=\frac{\cos 2A-\cos 2B\cos 2C}{\cos 2A\cos 2C-\cos 2B}$$

$$=\frac{\cos 2A-\frac{1}{2}\left[\cos(2B+2C)+\cos(2B-2C)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos(2A+2C)+\cos(2A-2C)\right]-\cos 2B}$$

$$=\frac{\cos 2A-\frac{1}{2}\left[\cos 2A+\cos(2B-2C)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos 2B+\cos(2A-2C)\right]-\cos 2B}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\cos 2A-\cos(2B-2C)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos(2A-2C)-\cos 2B\right]}$$

$$=\frac{-2\sin(A+B-C)\sin(A-B+C)}{-2\sin(A+B-C)\sin(A-C-B)}$$

$$=\frac{\sin(\pi-2B)}{\sin(2A-\pi)}$$

$$=-\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

類似的計算可得 $y=-\dfrac{\sin 2B}{\sin 2A}$

$\therefore \overrightarrow{OA}=-\dfrac{\sin 2B}{\sin 2A}\overrightarrow{OB}-\dfrac{\sin 2C}{\sin 2A}\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \sin 2A\,\overline{OA}+\sin 2B\,\overline{OB}+\sin 2C\,\overline{OC}$
$=\overrightarrow{O}$

(2) $\overrightarrow{OB}/\!/\overrightarrow{OC}$，則 O，B，C 共線，$\angle B=90$
$\angle B=90^\circ-\angle C$，
$\therefore \sin 2B=\sin 2C$，$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$
$\Rightarrow \sin 2A\,\overline{OA}+\sin 2B\,\overline{OB}+\sin 2C\,\overline{OC}$
$=\overrightarrow{O}$

【定理】

若取△ABC 的質量負荷為 A（$\sin 2A$），B（$\sin 2B$），C（$\sin 2C$），則△ABC 的質心 O（即滿足 $\sin 2A\,\overline{OA}+\sin 2B\,\overline{OB}+\sin 2C\,\overline{OC}=\overrightarrow{O}$）則 O 必為△ABC 的外心。

證：設 G 為△ABC 的外心，

由引理知 $\sin 2A\,\overline{GA}+\sin 2B\,\overline{GB}+\sin 2C\,\overline{GC}=\overrightarrow{O}$ ………………①

已知 $\sin 2A\,\overline{OA}+\sin 2B\,\overline{OB}+\sin 2C\,\overline{OC}=\overrightarrow{O}$ ………………②

②－① $\sin 2A(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{GA})+\sin 2B(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{GB})+\sin 2C(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{O}$

$\therefore \sin 2A\overrightarrow{OG}+\sin 2B\overrightarrow{OG}+\sin 2C\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{O}$

$\overrightarrow{OG}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=\overrightarrow{O}$

又 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\neq 0$

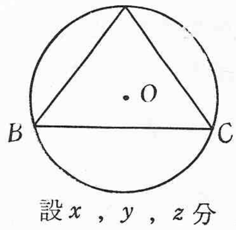
（$\because \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$
$=4\sin A\sin B\sin C$）請自驗

$\therefore \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{O}$　　$\therefore G=O$

附註：事實上，由引理及質心的意義已充分說明了 G 就是 O，以上的定理證明只是把這個直觀附諸嚴格的驗證而已。

王老師：

謝謝您的來信指正。文中三角形外心定理證明過程中："…點 G 在△ABC 的內部"實屬一項錯誤句子，須修改成："…點 G 落在△ABC 所決定之平面上"。才為適當。



這裡讓我舉出引理的另一個向量証明，並請指教。

三頂點所荷的質量，若外心 O 為三質點 $A(x)$，$B(y)$，$C(z)$ 的質心，則

$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=O$

設 x，y，z 分別為△ABC

上述向量式兩端與向量 $\overrightarrow{OA}$ 作外積得：$y\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA}+z\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{C}$

$\Rightarrow$　$y:z=\sin 2B:\sin 2C$

故 $x:y:z=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$

即若點 O 為△ABC 的外心，則

$\sin 2A\,OA+\sin 2B\,\overline{BOB}+\sin 2C\,\overline{COC}=\overrightarrow{O}$

何景國　覆

70年8月27日

(6.劉清田來函)

編輯先生：您好！

我是數學傳播的最新讀者，在獲知其內容及宗旨之後，一口氣買下已出版之全部數學傳播季刊。日前在第四卷第二期的數播信箱中看到許宗義讀者所提問題竟然與我一年前所無法解出的移子相間問題完全一樣。興奮之餘，再度擺下棋子，舊戲重玩

，僥倖得很，竟然想出黑白棋子各五枚、六枚之移法，遺憾的是，七枚、八枚……就沒着落。今將其移動法列於下：

五子原式	○○○○○⊗⊗⊗⊗⊗
移動第一次後	○ 　　○○⊗⊗⊗⊗⊗○○
移動第二次後	○⊗⊗○○⊗⊗ 　　⊗○○
移動第三次後	○⊗⊗○ 　　⊗○⊗⊗○○
移動第四次後	○⊗⊗○⊗○⊗○⊗ 　　○
移動第五次後	⊗○⊗○⊗○⊗○⊗○

六子原式	○○○○○○⊗⊗⊗⊗⊗⊗
移動第一次後	○ 　　○○○⊗⊗⊗⊗⊗⊗○○
移動第二次後	○⊗⊗○○○⊗ 　　⊗⊗⊗○○
移動第三次後	○⊗⊗ 　　○⊗○○⊗⊗⊗○○
移動第四次後	○⊗⊗○⊗○⊗○ 　　⊗⊗○○
移動第五次後	○⊗⊗○⊗○⊗○⊗○⊗ 　　○
移動第六次後	⊗○⊗○⊗○⊗○⊗○⊗○

目前只知道黑白棋子各三枚、四枚、五枚、六枚之移動法，似乎仍無法歸納出其一般式子，故此種問題是否能一直推廣下去，就不得而知，數播的讀者，一起來研究吧！

劉清田　敬上

70年6月18日

(7.于　靖來函)

編輯先生：

數學傳播第五卷第二期（即第18期）P.29～32「費馬問題之研究(一)」一文，主要的證明是錯誤的。該文第30頁

「　　　　　　伍.

今指定　$P_i = 2^{\alpha(n-1)} - y$　　　」

這樣的指定是不合理的，因爲P_i，α，n，y都是已固定數。這樣的關係，如果存在，必得證明。事實上，如果$x < y$的話，很容易證出這樣的等式根本不可能存在。

從$P_i < 2^{\alpha(n-1)}$並不能指定$P_i = 2^{\alpha(n-1)} - y$，因$y$不是任意數而是滿足$x^n + y^n = z^n$。

于　靖　上

70年10月5日

(8.楊維哲來函)

編輯先生：

我對於貴刊五卷二期（No.18）信箱（P.124）問一（林東棋同學所問的）黃啓瑞博士的回答不覺得滿意！周知的是

$$I = \int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

〔$\cos x$之奇數次方！如

$$\cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) d\sin x$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$$

〕

故　$I = \int \frac{1}{1 - \sin^2 x} d\sin x$，

令　$\sin x = u = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du$

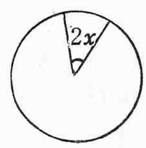
$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

楊維哲　上

(9.楊柏因來函)

我參加數學競試後，發現第3題，我的答案雖不完全，但所謂“參考答案”（建國中學教務處給我一份），也並不對。

原題：已給一扇形，（圓心角2α），求內接最大矩形及扇形本身面積比，〔稱爲$S(x)$〕，試證



$\frac{1}{2} < S(\alpha) \le \frac{2}{\pi}$。

我的解法如下：