(5.王淑霞來函)

編輯先生：

鄙人仔細研讀了第四卷第四期$P.120$ 質心的向量解釋及其在數學上的應用，深覺用質心這個觀點來解釋三線共點問題非常高明，但也很納悶於作者如何知道要對$\triangle ABC$ 的三頂點取何種質量負荷，而可得質心或爲重心，或爲內心、外心、垂心、傍心，我猜想應該是先有△諸心到ABC 的線性組合關係式，才有文中的Ⅱ質心在數學上的應用，剛

巧在$P.124$ 的6三角形的外心定理，證明過程中發現一個錯誤，證明部分第6行“所以點G在△ABC 的內部”，這句話很顯然是錯的，因爲三角形的外心可能在邊上（直角△的情形），也可能在△ABC 的外部（鈍角△的情形），因此嘗試以上面的猜想，把這個定理重新證明。

【引理】

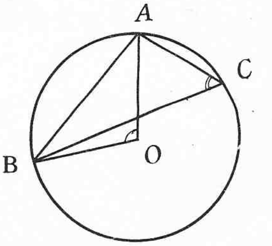
△ABC ，O是外心，試證：

$$\sin 2A\overrightarrow{OA}+\sin 2B\overrightarrow{OB}+\sin 2C\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$$

【分析】欲證

$$\sin 2A\overrightarrow{OA}+\sin 2B\overrightarrow{OB}+\sin 2C\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}.$$

此即是找$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的線性組合關係，故設$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$（＊） ，利用向量幾何學的基本技巧找$x$ ，y 。



【證明】

(1) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

設$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

$\because$ O是外心，

$$\therefore\quad OA=OB=OC=R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2C$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2B$，

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=K^2\cos 2A$，

則 $\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}&=x\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=x\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}\end{aligned}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\cos 2C+y\cos 2B=1\\ x+y\cos 2A=\cos 2C\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}1 & \cos 2B\\ \cos 2C & \cos 2A\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos 2C & \cos 2B\\ 1 & \cos 2A\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\cos 2A-\cos 2B\cos 2C}{\cos 2A\cos 2C-\cos 2B}$$

$$=\frac{\cos 2A-\frac{1}{2}[\cos(2B+2C)+\cos(2B-2C)]}{\frac{1}{2}[\cos(2A+2C)+\cos(2A-2C)]-\cos 2B}$$

$$=\frac{\cos 2A-\frac{1}{2}[\cos 2A+\cos(2B-2C)]}{\frac{1}{2}[\cos 2B+\cos(2A-2C)]-\cos 2B}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}[\cos 2A-\cos(2B-2C)]}{\frac{1}{2}[\cos(2A-2C)-\cos 2B]}$$

$$=\frac{-2\sin(A+B-C)\sin(A-B+C)}{-2\sin(A+B-C)\sin(A-C-B)}$$

$$=\frac{\sin(\pi-2B)}{\sin(2A-\pi)}$$

$$=-\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

類似的計算可得 $y=-\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$

$\therefore \overrightarrow{OA}=-\frac{\sin 2B}{\sin 2A}\overrightarrow{OB}-\frac{\sin 2C}{\sin 2A}\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \sin 2A\,\overline{OA}+\sin 2B\,\overline{OB}+\sin 2C\,\overline{OC}$
$=\overrightarrow{O}$

(2) $\overrightarrow{OB}/\!/\overrightarrow{OC}$，則 O，B，C 共線，$\angle B=90$
$\angle B=90^\circ-\angle C$，
$\therefore \sin 2B=\sin 2C$，$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$
$\Rightarrow \sin 2A\,\overline{OA}+\sin 2B\,\overline{OB}+\sin 2C\,\overline{OC}$
$=\overrightarrow{O}$

【定理】

若取 $\triangle ABC$ 的質量負荷爲 $A(\sin 2A)$，$B(\sin 2B)$，$C(\sin 2C)$，則 $\triangle ABC$ 的質心 O（即滿足 $\sin 2A\,\overline{OA}+\sin 2B\,\overline{OB}+\sin 2C\,\overline{OC}=\overrightarrow{O}$）則 O 必爲 $\triangle ABC$ 的外心。

證：設 G 爲 $\triangle ABC$ 的外心，

由引理知 $\sin 2A\,\overline{GA}+\sin 2B\,\overline{GB}$
$+\sin 2C\,\overline{GC}=\overrightarrow{O}$ ……………①

已知 $\sin 2A\,\overline{OA}+\sin 2B\,\overline{OB}$
$+\sin 2C\,\overline{OC}=\overrightarrow{O}$ ……………②

②－① $\sin 2A(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{GA})+\sin 2B(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{GB})+\sin 2C(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{O}$

$\therefore \sin 2AOG+\sin 2BOG+\sin 2COG=\overrightarrow{O}$

$\overrightarrow{OG}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=\overrightarrow{O}$

又 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\neq 0$

$(\because \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C)$ 請自驗

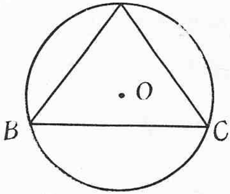
$\therefore \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{O}$　　$\therefore G=O$

附註：事實上，由引理及質心的意義已充分說明了G就是O，以上的定理證明只是把這個直觀附諸嚴格的驗證而已。

王老師：

謝謝您的來信指正。文中三角形外心定理證明過程中："…點G在$\triangle ABC$ 的內部"實屬一項錯誤句子，須修改成："…點G落在$\triangle ABC$ 所決定之平面上"。才爲適當。

這裡讓我舉出引理的另一個向量証明，並請指教。



設x，y，z分別爲$\triangle ABC$三頂點所荷的質量，若外心O爲三質點$A(x)$，$B(y)$，$C(z)$的質心，則

$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=O$

上述向量式兩端與向量$\overrightarrow{OA}$作外積得：$y\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA}+z\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{C}$

$\Rightarrow\ y:z=\sin 2B:\sin 2C$

故 $x:y:z=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$

即若點O爲$\triangle ABC$ 的外心，則

$\sin 2AOA+\sin 2\overrightarrow{BOB}+\sin 2\overrightarrow{COC}=\overrightarrow{O}$

何景國　覆

70年 8 月27日