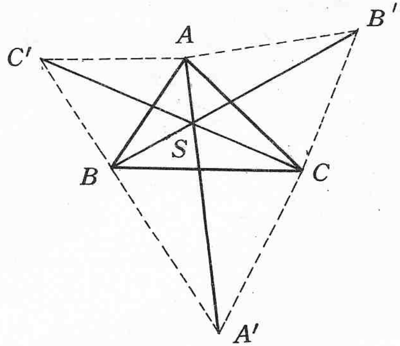
三角形的極小問題

蕭　守　仁

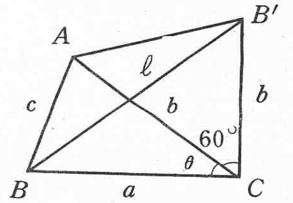
在實驗本第三册 5－4 有三個“極小問題”其中“已知三定點，求一點使到三定點距離和最小”的解說相當詳盡。不過，似乎只考慮到一般情形至於特殊情況則欠說明，本文即針對此特殊情形提出討論。

原題是“已知三定點 A，B，C 求一點 S。使 $SA+SB+SC$ 最小”，實驗本的解法如下：

分別以 AB，BC，CA 爲邊向外作正三角形（如圖一）



$\triangle ABC'$，$\triangle BCA'$，$\triangle CAB'$。連結 AA'，BB'，CC' 得交點 S 即爲所求。且 $SA+SB+SC=AA'=BB'=CC'$（證明請參看實驗本）當然我們可另外求得此最小的 $SA+SB+SC=AA'=BB'=CC'$ 之值。求法如下：（圖二）



設　$AB=c$　$AC=b$　$BC=a$　$BB'=\ell$

$\angle ACB=\theta$

則　由餘弦定律及三角形面積公式可得

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

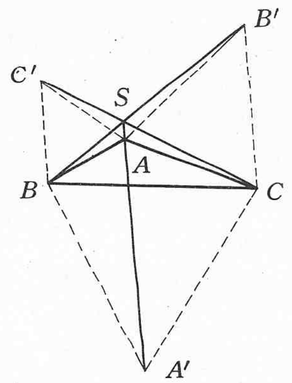
$$\sin\theta=\frac{2\triangle ABC}{ab}$$

又由餘弦定律

$$\begin{aligned}\ell^2&=a^2+b^2-2ab\cos(\theta+60^\circ)\\&=a^2+b^2-2ab(\cos\theta\cos 60^\circ-\sin\theta\sin 60^\circ)\\&=a^2+b^2-2ab\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\times\frac{1}{2}-\frac{2\triangle}{ab}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\triangle)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ell=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\triangle}$$

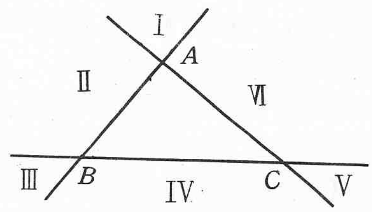
不過此種解法只適用於當 $\triangle ABC$ 中最大。角小於或等於 120° 時。至於 $\triangle ABC$ 中最大角大於 120° 時依上法所得 AA'，BB'，CC' 之交點必落於 $\triangle ABC$ 外部。（圖三）



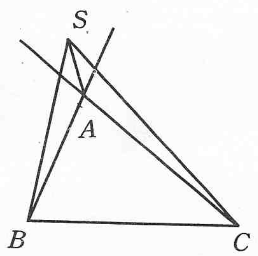
此點不可能滿足所求，以下即證明之。

定理 1　已知 $\triangle ABC$，S 在 $\triangle ABC$ 外部，則必存在點 P 在 $\triangle ABC$ 內部或邊上使 $PA+PB+PC<SA+SB+SC$。

證明：如圖將 $\triangle ABC$ 的外部分割成六部分（圖四）



I III V 包含界線，II IV VI 不包含界線。（圖五）

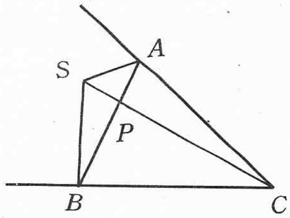


(i)　$S\in I$ 時，取 $P=A$。則

$$\begin{array}{rl} & SB+SC>PB+PC\\ +) & SA>PA=PP\\ \hline & SA+SB+SC>PA+PB+PC\end{array}$$

同理可證　$S\in$ III V 時

(ii)　$S\in$ II 時，取 P 爲 SC 交 AB 的交點，則（圖六）



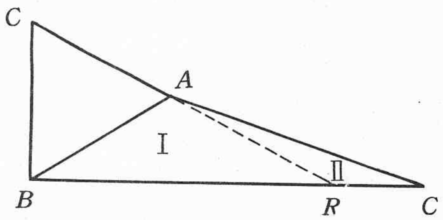
$$\begin{array}{rl} & SA+SB>AB=PA+PB \\ +)\ & SC \qquad >PC \\ \hline & SA+SB+SC>PA+PB+PC \end{array}$$

同理可證　$S\in$ Ⅲ Ⅵ 時

由定理1，可知實驗本的方法並不適用於當$\triangle ABC$中最大角於120°　時，事實上，當最大角大於120°　時，滿足條件的S點在鈍角頂上，以下證明之。

定理2　已知$\triangle ABC$，$\angle A>120^\circ$，則滿足使$SA+SB+SC$最小的S點即A點。

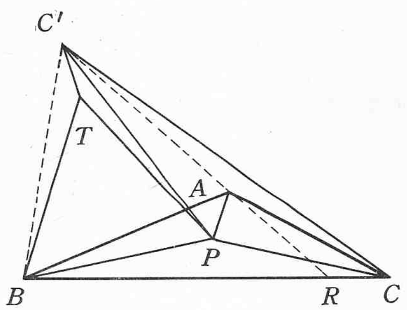
證明：如圖七以AB為邊向外做正三角形ABC'，延長$C'A$交BC於R。且$B-R-C$　$\because$（$\because \angle BAC>120^\circ$），於是$\triangle ABC$內部及邊上分成二部分



Ⅰ：$\triangle ABR$內部及邊上除去AR。

Ⅱ：$\triangle ARC$及其內部。

(i)　$P\in I$時，以B為心，將$\triangle BPA$背C轉60°得$\triangle BTC'$，連接PC'．TP（圖八）



則　$\triangle BPA\cong\triangle BTC'$且$\triangle BPT$為正$\triangle$

$\therefore$　$PA=TC'$　　$PB=TB=TP$

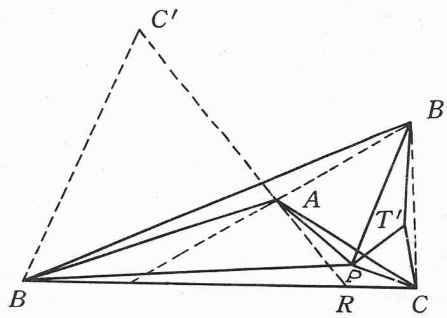
在$\triangle PTC'$　中及$\triangle PCC'$中

$PT+TC'>PC'$,

$PC'+PC>AC'+AC$

$$\begin{array}{rl} \text{即} & PB+PA>PC' \\ +) & PC'+PC>AC+AB+AA\ (AC'=AB) \\ \hline & PA+PB+PC>AA+AB+AC \end{array}$$

(ii)　$P\in$ Ⅱ時，以C為圓心將$\triangle CPA$背B轉60°得$\triangle CT'B'$，連接PB'，$T'P$仿(i)可得。（圖九）



$PA+PB+PC\geq AA+AB+AC$

等號於$P=A$成立。

(iii)　由(i)(ii)討論可知，所求S必不在$\triangle ABC$內部，及邊上但可能為A點又由定理1知滿足使$SA+SB+SC$最小的S點必為A點。

至此，我們可了解，當$\triangle ABC$的最大角大於120°時，滿足條件的S必在鈍角頂上，關於定理2的證明何以分成兩區討論，理由是：為了使A點保持在$\triangle PCC'$內部以方便討論。

—— 本文作者現任教於嘉義高中。