一些重要不等式的幾何意義及其證法

羅 添 壽

有一次，朋友爲買房子來訪，問道：「房間每間之周長一定，則長寬應如何，才能使每間之面積最大。」此問，讓筆者想了一些“不等式”之幾何意義，今將其性質分述如下：

(A) 算術平均術≥幾何平均數

1. ① 數學之實驗歸納對任二不小於零之數而言，其平均數可有二不同之意義：

① 算術平均數——兩數和之半

② 幾何平均數——兩數積之平方根

例 $\frac{1+2}{2}=1.5$，$\sqrt{1\cdot 2}=\sqrt{2}=1.4137\cdots\cdots$

$$\therefore \quad \frac{1+2}{2}>\sqrt{1\cdot 2}$$

又 $\frac{3+9}{2}=6$，$\sqrt{3\cdot 9}=\sqrt{27}=5.19\cdots\cdots$

$$\therefore \quad \frac{3+9}{2}>\sqrt{3\cdot 9}$$

$\frac{5+5}{2}=5$，$\sqrt{5\cdot 5}=5$

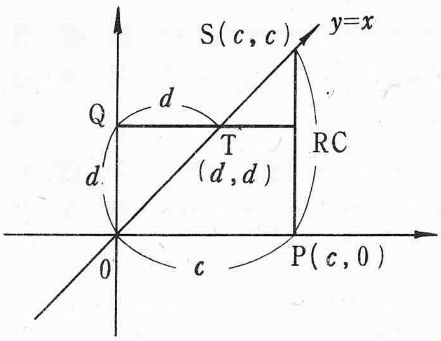
$$\therefore \quad \frac{5+5}{2}=\sqrt{5\cdot 5}$$

由上例得下之定理成立

(1) 設 a，b 為任意二不小於零之數，則恒有 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，其中等號若且唯若 $a=b$ 時成立。

今將其幾何證法證明於下：

【證1】(利用簡單的幾何圖形面積比）如下圖：



設圖中 $S(c, c)$，$T(d, d)$ 在 $y=x$ 直線上，又令 $P(c, o)$，$Q(o, d)$，$R(c, d)$

則 $OP=c$，$PS=c$

$\therefore a\triangle OPS=\frac{c^2}{2}$，　$a\triangle OQT=\frac{d^2}{2}$

今由圖知 $a\triangle OQT+a\triangle OPS\geq a\square OPRQ$

$\therefore \frac{d^2}{2}+\frac{c^2}{2}\geq cd$（其中 $a\square OPRQ=cd$）

令 $c^2=a$，$d^2=b$，

則 $\sqrt{a}=c$，$\sqrt{b}=d$ 代入上式

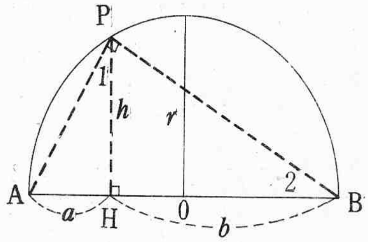
得 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

【註】若 $a\triangle TRS=0$，則 S 與 T 重合，即 $c=d$

$\therefore$ $a=b$ 時等號成立

【證2】

設 a，b 為直線上兩相鄰線段之長，今以 $a+b$ 為直徑作一半圓，如下圖，則此圓之半徑 r 為 a，b 之算術平均數，而 h 為其幾何平均數。



今證明此敍述如下：

① 以 a，b 之和為直徑作半圓。

② 在半圓上取一點 P，連接直徑兩端點 A，B，過 P 作 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$。

則 $\triangle PAH\sim\triangle PBH$

（$\because \angle PHA=\angle PHB=90^\circ$，$\angle_1=\angle_2$ 如圖）

$\therefore \frac{h}{a}=\frac{b}{h}\Rightarrow h^2=ab$

$\Rightarrow h=\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$（$\because a>0$，$b>0$）

又 $r=\frac{a+b}{2}\geq h$（如圖）

$\therefore \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

（當 $r=h$ 即 H 與 O 重合時等號成立，亦即 $a=b$ 時等號成立）

由上之證明得下例題成立

例1. 兩正數之和一定,則當兩數相等時其乘積最大

【類題】(68年聯考）

線段長 AB 為12，在線段上任取一點 P，則兩線段 $\overline{AP}$，$\overline{PB}$ 長度的積 $f(p)$ 之極大值 M 為何？

例2. 兩正數之積一定，則當兩數相等時，其和最小。

【類題】設一扇形之面積為定值 k，則扇形之

①、最小周長為何？

②周長最小時的中心角與半徑分別為何？

答：① $2\sqrt{k}$　② 中心角2弳，半徑 $\sqrt{k}$

例3. 長方形 $ABCD$，$\overline{AB}=5$，$\overline{AD}=8$，設 P 為 $\overline{AB}$ 邊上一點，Q 為 $\overline{AD}$ 邊上一點，若 $\overline{PQ}=3$，則五邊形 $QPBCD$ 之最小面積為何？

答：$\frac{151}{4}$

2. 三數的算術平均數與幾何平均數之不等關係式

由實驗之方法得非負三正數1，2，3得算術平均數為 $\frac{1+2+3}{3}=2$

又幾何平均數為 $\sqrt[3]{1\cdot2\cdot3}=\sqrt[3]{6}<\sqrt[3]{8}=2$

$\therefore \frac{1+2+3}{3}>\sqrt[3]{1\cdot2\cdot3}$，又三數相等時等號成立。

由此實數得：

(2) 設 a ， b ， $c\in R^{+}$，

則 $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ ，若且唯若 $a=b=c$ ，則等號成立。

例 4. 設有一長方體，其體積爲 10 ，則其全表面積之最小值爲何？

答：$6\times 10^{\frac{2}{3}}$

3. n 個數之算術平均數與幾何平均數之不等關係式：

(3) 設 a_1 ， a_2 ，⋯， $a_n\in R$ 且均不爲負，則

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot a_3\cdots a_n}$$

若且唯若 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ 時上式等號成立。

(B) Cauchy 不等式（柯西不等式）

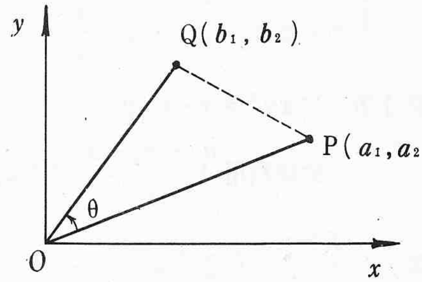
1. Cauchy 不等式二維（二度）情形，即若 a_1 ， a_2 ； b_1 ， b_2 爲任意實數，則

$(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)$
$\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

2. Cauchy 不等式在二維空間之幾何意義：

$(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

之證明如下：



【證】

如圖△OPQ 頂點 O 爲平面坐標之原點，而 P ， Q 之坐標爲 (a_1, a_2)，(b_1, b_2)

則 $\overline{OP}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

$\overline{OQ}=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

$\overline{PQ}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

設 $\overline{OP}$ 與 $\overline{OQ}$ 之夾角爲 θ ，則由餘弦定理得

$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\,\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cos\theta$

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]}{2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

又 $-1\leq\cos\theta\leq 1\ \Rightarrow\ 0\leq\cos^2\theta\leq 1$

$$\therefore\frac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)}\leq 1$$

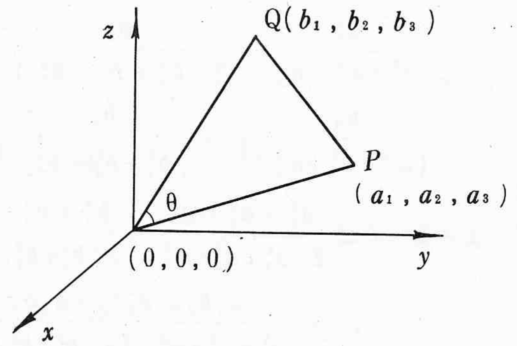
$\Rightarrow\ (a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

【註】若且唯若 $\cos^2\theta=1$ 時等號成立，即 θ 表一零角或平角或 O ， P ， Q 三點共線

$\therefore m_{\overleftrightarrow{OP}}=m_{\overleftrightarrow{OQ}}\Rightarrow\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}$

但 $a_1b_1\neq 0$ 且 $a_2b_2\neq 0$

3. $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$ 之三維空間之幾何意義。



如圖設 $P(a_1, a_2, a_3)$，$Q(b_1, b_2, b_3)$，$O(0, 0, 0)$

且 $\overline{OP}$，$\overline{OQ}$ 之夾角爲 θ ，由二誰空間之證明，同理

$$\text{則}\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$\because\ \cos^2\theta\leq 1$　故

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$
$\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$ 恒成立

若且唯若當 O ， P ， Q 三點，共線成立且 $b_1b_2b_3\neq 0$

則 $\overline{OP}/\!/\overline{OQ}$ $\therefore\ \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

【註】此題亦可由向量之內積證明之

$$\text{即}\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|}$$

4. *Cauchy* 不等式之三維空間之另一證法

$\because \ (x-y)^2 \geq 0$，令 x，$y \in R$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy$ ……………………①

令 $x = \dfrac{a_1}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}}$，

$y = \dfrac{b_1}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$，代入①

得 $\dfrac{a_1^2}{2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)} + \dfrac{b_1^2}{2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}$

$\geq \dfrac{a_1}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{b_1}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$ …②

同理得 $\dfrac{a_2^2}{2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)} + \dfrac{b_2^2}{2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}$

$\geq \dfrac{a_2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{b_2}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$ …③

$\dfrac{a_3^2}{2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)} + \dfrac{b_3^2}{2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}$

$\geq \dfrac{a_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{b_3}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$ …④

②＋③＋④ $\Rightarrow \dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)} + \dfrac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}$

$\geq \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\therefore 1 \geq \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$

兩邊平方 $\Rightarrow (a_1^2+a_2^2+a_3^2) \cdot (b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

$\geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

由上之證明 *Cauchy* 不等式之 n 維空間情形，亦可得證

即：$a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots, a_n$；$b_1, b_2, b_3 \cdots b_n \in R$

則 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

$\geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$ 成立

例5. 利用向量內積之定義，證明“歌西不等式”

即 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \geq |\vec{a} \cdot \vec{b}|$

【提示】$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$，再取絕對值。

【類題】設 $x^2+y^2+z^2=1$，x，y，$z \in R$，利用向量求下列之極值。

① 求 $x+2y-3z$

② 求 $6x-2y-3z$

【提示】令 $\vec{A} = [x, y, z]$，$\vec{B} = [1, 2, -3]$

$\vec{C} = [6, -2, -3]$

由 $|\vec{A}|^2 \cdot |\vec{B}|^2 \geq |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2$ 得

① $-\sqrt{15} \leq x+2y-3z \leq \sqrt{15}$

② $-7 \leq 6x-2y-3z \leq 7$

(C) 不等式之例題解析

我們已對算術平均數大於或等於幾何平均數與 *Cauchy* 不等式做了一些驗證工作，今再列舉一些試題研討其性質：

1. 算術平均數≥幾何平均數

【分析】一般試題，若已知和求積或已知積求和，該想到算術平均數≥幾何平均數。

例6. 設 $x+2y=1$ 且 x，$y \in R^+$

求① xy 之極大值，並求此時之 x，y 值

② xy^2 之極大值，並求此時之 x，y 值

③ x^2y 之極大值，並求此時之 x，y 值

解：① $\because \ x+2y \geq 2\sqrt{x \cdot 2y}$

$\Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{2xy} \Rightarrow 1 \geq 8xy$

即 xy 之極大值爲 $\dfrac{1}{8}$

又當 $x=2y$ 時，即

$\begin{cases} x=2y \\ x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ 時，有極大值

【分析】② $\because xy^2 = x \cdot y \cdot y$

故該利用 $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$

解：② $\because \dfrac{x+y+y}{3} \geq \sqrt[3]{xy^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \geq \sqrt[3]{xy^2} \Rightarrow xy^2 \leq \dfrac{1}{27}$

且當 $x=y=y$ 時，即

$\begin{cases} x=y \\ x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 時有極大值 $\dfrac{1}{27}$

【分析】③ $\because x^2y = x \cdot x \cdot y$，故 x 要分爲 2 個

解：$\because \dfrac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2y}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 2y}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \geq \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}x^2y} \Rightarrow \dfrac{1}{27} \geq \dfrac{1}{2}x^2y$

$\Rightarrow \dfrac{2}{27} \geq x^2y$

即 $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=2y \\ x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{1}{6} \end{cases}$ 時有極大值 $\dfrac{2}{27}$

由上解題過程得下面之心得

若 $x, y, z \in R^+$，$a, b, c \in R^+$ 且 $ax+by+cz=t$，求 $x^m \cdot y^n \cdot z^l$ 之最大值，此即將 ax 等分 m 個，by 等分 n 個，cz 等分成 l 個。

且當 $\dfrac{ax}{m}=\dfrac{by}{n}=\dfrac{cz}{l}=\dfrac{ax+by+cz}{m+n+l}=\dfrac{t}{m+n+l}$

即 $\begin{cases} x=\dfrac{mt}{b(m+n+l)} \\ y=\dfrac{nt}{b(m+n+l)} \\ z=\dfrac{lt}{c(m+n+l)} \end{cases}$

時 $x^m \cdot y^n \cdot z^l$ 有最大值 $\left(\dfrac{mt}{a(m+n+l)}\right)^m \cdot \left(\dfrac{nt}{b(m+n+l)}\right)^n \cdot \left(\dfrac{lt}{c(m+n+l)}\right)^l$

例 7. 設 $x>0$，$y>0$ 且 $x^2y=4$，求 $x+2y$ 之極小值，並求此時之 x，y 值。

【分析】由上之心得知 $x+2y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+2y$

解：$\because \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+2y \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{2}}$

$\Rightarrow x+2y \geq 3\sqrt[3]{2}$ 爲其極小值

且當 $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=2y \\ x^2y=4 \end{cases}$ 時，

即 $x=2\sqrt[3]{2}$，$y=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$ 時有極小值

【類題】

① 設 $x, y, z \in R^+$ 且 $x+y+z=1$，求 xy^2z^3 之極大值，並求此時之 x，y，z

答：$x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{1}{2}$

且極大值爲 $\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

② 設 $x, y, z \in R^+$ 且 $xy^2z^3=1$，求 $x+y+z$ 之極小值，並求此時之 x，y，z。

答：當 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 時，即 $x=\sqrt[6]{\dfrac{1}{108}}$，$y=2\sqrt[6]{\dfrac{1}{108}}$，$z=3\sqrt[6]{\dfrac{1}{108}}$ 時，$x+y+z$ 有極小值。

2. 柯西不等式

【分析】一般試題：若已知諸數平方和求和或求平方和該想到柯西不等式。

例 8. 設 $P(x_1, y_1, z_1)$ 在球 $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z=12$ 上，求 $3x_1+2y_1+6z_1$ 之最大值，並求此時之 P 點坐標。

解：$\because x_1^2+y_1^2+z_1^2-4x_1-4y_1-2z_1-12=0$ ……………………………①

$\Rightarrow (x_1-2)^2+(y_1-2)^2+(z_1-1)^2=21$

由柯西不等式知

$[(x_1-2)^2+(y_1-2)^2+(z_1-1)^2]\cdot(3^2+2^2+6^2) \geq [3(x_1-2)+2(y_1-2)+6(z_1-1)]^2$

$\Rightarrow 21\times 49 \geq (3x_1+2y_1+6z_1-16)^2$

$\Rightarrow -7\sqrt{21} \leq 3x_1+2y_1+6z_1-16 \leq 7\sqrt{21}$

$\Rightarrow -7\sqrt{21}+16 \leq 3x_1+2y_1+6z_1 \leq 7\sqrt{21}+16$

$\therefore$ 最大值爲 $7\sqrt{21}+16$

又當 $\dfrac{x_1-2}{3}=\dfrac{y_1-2}{2}=\dfrac{z_1-1}{6}=t$ 時

$\Rightarrow x_1=2+3t$，$y_1=2+2t$，$z_1=1+6t$

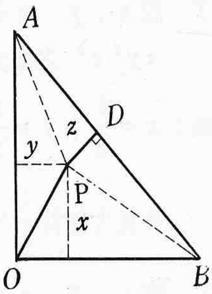
代入①

$\Rightarrow t=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 但 $t=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 不合

$\therefore x_1=2+\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$，$y_1=2+\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，

$z_1=1+\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$

【類題】設$\triangle AOB$中$\angle O$為直角，$\overline{OA}=4$，$\overline{OB}=3$，P為三角形內部任意一點，作$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$D$為垂足，求$\overline{OP}^2+\overline{PD}^2$之最小值。



答：$\frac{72}{25}$

【提示】①

$a\triangle ABO=a\triangle POB+a\triangle POA+a\triangle PAB$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot y+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot z$

$\Rightarrow 3x+4y+5z=12$

(D)結論與作業：

為使讀者對此篇文章有更深刻的了解，且能廣泛的應用至各單元，筆者今舉一些實例，供各位演練，以收事半功倍之效。

【作業】

1. (直線方程式)

設一直線過$P(-3,5)$且在第二象限內與x軸，y軸所圍成之三角形使其面積最小，求

① 直線方程式

② 最小三角形之面積

2. (平面幾何)

一長方體表面積為12平方單位，則體積最大為多少(立方單位)

3. (平面幾何)

周長一定之三角形中面積最大者為何種三角形？(證明之)

4. (應用問題)

一水槽用A，B二水管灌水，最初祇用A管灌滿水槽的$\frac{1}{5}$後，即停用A管而改用B管繼續灌水，兩管前後共用9小時才灌滿全槽，今若A，B兩管併用，則在幾小時以內可以灌滿全槽？

5. (直線方程式)

設O為直角坐標系之原點，過點$P(2;3)$之一直線與x軸正向，y軸正向各交於A，B求$\overline{OA}+\overline{OB}$之最小值(註此題容易錯誤)

6. (圓)

以$\overline{AB}$為直徑之圓周上一點P，若$\overline{AB}=1$，求$3\overline{AP}+4\overline{BP}$之最大值。

7. (橢圓)

設P為橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$(a>b>0)$上一點，過$P$作橢圓切線與兩軸相交於$A$，$B$，求$\overline{AB}$之最小值，並求$\triangle OAB$之最小面積。

8. (球)

設$S(a,b,c)$在球$S_1: x^2+y^2+z^2=4$上，$Q(l,m,n)$在球$S_2: x^2+y^2+z^2=9$上，求下列各小題之範圍。

① $al+bm+cn$

② $am+bl-cn$

③ $an-bm-cl$

④ $an+bl+cm$

⑤ $am-bn+cl$

【作業解答】

1. ① $L:\frac{x}{-6}+\frac{y}{10}=1$

② 最小三角形面積為30°

2. 當$ab=bc=ca$，即$a=b=c$時最大體積為$2\sqrt{2}$

3. 設周長為$2S$，三邊長為a，b，c，面積為$\triangle$，則

$\triangle=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$\because S-a>0$，$S-b>0$，$S-c>0$，

$\therefore\frac{(S-a)+(S-b)+(S-c)}{3}$

$\geq\sqrt[3]{(S-a)(S-b)(S-c)}$

$\therefore\ \frac{S}{3}\geq\sqrt[3]{(S-a)(S-b)(S-c)}$

$\therefore\frac{S^3}{27}\geq(S-a)(S-b)(S-c)$

$\Rightarrow\frac{S^4}{27}\geq S(S-a)(S-b)(S-c)$

$\therefore\triangle\leq\frac{S^2}{3\sqrt{3}}$且當$S-a=S-b=S-c$，

即$a=b=c$時$\triangle$最大

【誤解】$\dfrac{S+(S-a)+(S-b)+(S-c)}{4}$

$\geq \sqrt[4]{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$\therefore\quad \triangle \leq \dfrac{S^2}{4}$

當 $S=S-a=S-b=S-c$ 時，

$\triangle$ 之最大值爲 $\dfrac{S^2}{4}$，此爲錯誤

$\because S \neq S-a$ 且 $S \neq S-b$，$S \neq S-c$ 之故。

4. 設水槽容量爲 1；A，B 每小時灌水量爲 x，y，則

$\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{y}=9\times 1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=45$

$\therefore\ 45(x+y)=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)(x+y)$

$=5+\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\geq 5+2\cdot\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{4x}{y}}=9$

$\therefore 45(x+y)\geq 9 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{x+y}\leq 5$

即當 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4x}{y}=2$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{15}$，$y=\dfrac{1}{15}$ 時，兩人合作至多 5 小時可灌滿全槽。

5. 令 $\overleftrightarrow{AB}$：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$

且 $a>2$，$b>2$

$\therefore(a-2)(b-3)=6$

又 $(a-2)+(b-3)\geq 2\sqrt{(a-2)(b-3)}$

$\Rightarrow\quad a+b\geq 5+2\sqrt{6}$

即 $a-2=b-3=\sqrt{6}$

$\Rightarrow\quad a=2+\sqrt{6}$，$b=3+\sqrt{6}$ 時，

$OA+OB$ 之最小值爲 $5+2\sqrt{6}$

【誤解】$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{6}{ab}}$

$\Rightarrow \sqrt{ab}\geq 2\sqrt{6}$ …………………①

又 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ………………②

由①②得 $a+b\geq 4\sqrt{6}$，此爲誤解

（$\because$①，②之等號不同時成立）

6. $(3^2+4^2)\cdot(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)\geq(3\overline{AP}+4\overline{BP})^2$

$\Rightarrow\quad 3\overline{AP}+4\overline{BP}\leq 5$

7. 令 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 過 P 之切線交 x 軸於 $A\left(\dfrac{a}{\cos\theta}, 0\right)$ y 軸於 $B\left(0, \dfrac{b}{\sin\theta}\right)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\left(\left(\dfrac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sin\theta}\right)^2\right.}$

$=\sqrt{\left[\left(\dfrac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sin\theta}\right)^2\right]\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]}$

$\geq\sqrt{(a+b)^2}=a+b$

又 $a\triangle AOB=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{a}{\cos\theta}\cdot\dfrac{b}{\sin\theta}\right|$

$=\dfrac{ab}{|\sin 2\theta|}\geq ab$

8. 皆在〔-6，6〕區間內

—本文作者現任教於新化高中