

70年台北區高中聯考數學科考題評析

余 霖

壹、前 言

台北區高中聯招會突破往例，邀請兩位教授入闖指導數學科命題。大多數考生在考完數學後，都認為偏難。在國中數學教師間更是議論紛紛莫衷一是。筆者以一個現任國中數學教師，四年高中和六年國中的教學經驗；本諸關心國中數學教育的發展，以客觀持平之態度從事考題評析，為國中數學教育一盡心力。

貳、今年台北區高中數學科命題特色

一、專家熱心參與指導

在教育局黃昆輝局長的邀請下，台大數學系楊維哲教授與測驗專家師大教心系郭生玉教授兩人，在炎夏日不畏劇暑與其他命題人員一起入闖，指導有關命題工作。多年來專家學者，“對國中數學教育常寄予關懷注意，現在更能熱心指導”高中入學考試之命題，將可對今後的國中數學教育產生積極而深遠的影響。

二、著重思考減少考題數目

據楊教授表示，往年聯考數學命題題目太多，在七十分鐘內必須答完 44 至 48 題。使考生無法從事深刻思考，全然變為機械反應。為改善此項缺失，特別減少考題，使學生有足夠時間進行思索，藉此提高學生高層次的思考能力。

三、強調圖形與函數之關連

圖形和函數之間的轉換，一直是數學科關鍵性的概念。因之本次考題偏重在幾何及函數圖形，希望教師及考生能注重此一主題。特別是二次函數在高中教材中仍占有重要地位，若能藉此導引國中數學教學之方向，未嘗不是學生之福。

四、採用連鎖題評量完整概念

由於聯考採用大量測驗題，因之學生對教材之認識往往流於支離破碎，形成高成就低程度的現象。今年首次採用連鎖題，希望能測驗出學生對某一單元是否有通盤的了解，另外一題之中融合幾個基本概念以評量學生融會貫通的能力。

參、重要考題評析

茲就考題中有討論價值的部分，評析如下：

一、選擇題部分

1. 2~5 題試將下列四個實數，從大到小，依次排列，回答

(甲) $\sec 44^\circ$ (乙) $\sin 46^\circ$ (丙) $\cos 47^\circ$ (丁) $\csc 48^\circ$

2. 最大的是？

3. 其次是？

4. 再小的是？

5. 最小的是？

(分析)：第 2 題至第 5 題比較 $\sec 44^\circ$ ， $\sin 46^\circ$ ， $\cos 47^\circ$ ， $\csc 48^\circ$ 之大小，係利用餘角性質和三角函數值之變化求解，可合併為一題。如此可增加 3 題，使試題的分佈更加合理。同時在計分時應採連坐法否則失去本題測驗之意義。

2. 第 8 題已知等差數列第 3 項與第 36 項之和為 48 第 2 項為 b ，求第 9 項與第 30 項的和是多少？

(分析)：此題中故意多列第 2 項為 b ，以混淆學生思考，同時在已知條件中僅需利用首項，公差之關係式，而不必分別求出首項，公差，即可求出答案。此題頗具創意，但前年台南考區曾有類似題。

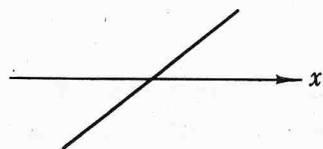
3. 第 9 題設 $f(x) = x^2 + 5x + 6$ ， $g(x) = (x + 3)^2 - 1$ ， $h(x) = x^2 - 2x^2 - kx + 6$ ，三者的 H.C.F 為一次式，求 $k = ?$

第 10 題：試求上題 $f(x)$ ， $g(x)$ ， $h(x)$ 三者之 $L.C.M$ 。

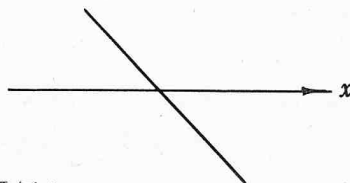
(分析)：第 9、10 題是連鎖題，分別求 $H.C.F$ 和 $L.C.M$ ，但此二題並未構成一個完整概念，似乎沒有必要出連鎖題，仍以單一考題為宜。

4. 第 13 題函數 $y = 9 - 2x$ 的圖形為何？

(甲)

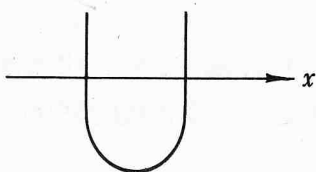


(乙)

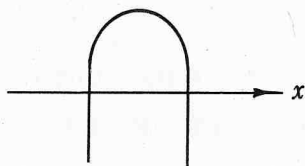


- 第 14 題函數 $y = 3x^2 - 7x + 2$ 的圖形為何？

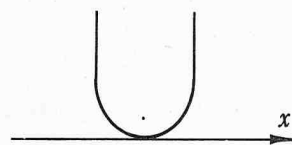
(甲)



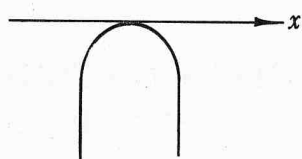
(乙)



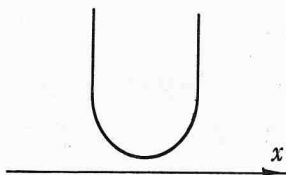
(丙)



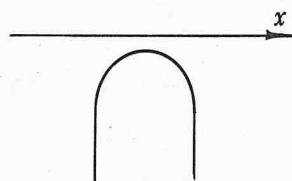
(丁)



(戊)

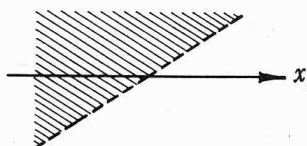


(己)

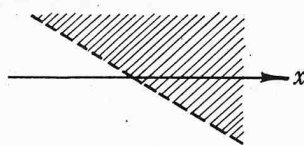


- 第 15 題不等式 $-3x + 7y < 2$ 的圖形為何？

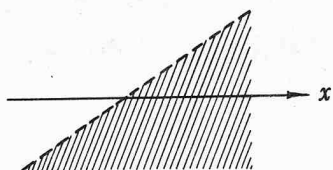
(甲)



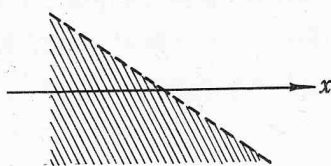
(乙)



(丙)



(丁)



(分析)：第13、14、15題均省略 y 軸，此一方式大有商榷餘地；國中數學課本有關平面坐標之圖形，均強調 x 軸， y 軸，原點，正負向，單位長等要素。因之 y 軸省略後，學生無法適應，並可能對任課教師強調平面坐標之各項基本要素感到懷疑。

- 第13題出題者顯然旨在測驗考生有關斜率的觀念，而國中生解題時，仍用二點劃出一直線的方法，因此失去出題者原意。同時第15題有關不等式之圖形，亦須先繪出直線，造成兩題在某些部分雷同。若第13題改命其他題目更為允當。
- 第14題判斷二次函數 $y = 3x^2 - 7x + 2$ 之圖形，須利用二次項係數 $a = 3 > 0$ ，及判別式 $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 > 0$ ，此題有關二次函數重要概念，頗具測驗價值。但二次函數仍有多項重要性質未能列入命題頗為可惜。

二、填充題部分

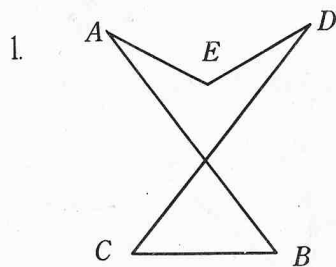
- $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 於 D ， $\overline{AB} = 10$ ， $\triangle BCD : \triangle ACD = 2 : 3$ ，第五題求 $\overline{CD} = ?$ ，第6題求 $\triangle ACD = ?$

(分析)：第5、6題為連鎖題，係利用直角三角形中比例中項性質，該題並須利用相似三角形性質。學生必須有熟練的運算能力，才能得此6分。

- 一個農夫在柑園中種了40株柑樹，每株年產1200個。若在此園中，每加種一株，則每株每年少產18個柑子。第7題求應加種多少株才能使此園的產量最大？第8題求最大產量？

(分析)：第7、8題為連鎖題，係將課本例題稍加變化。利用柑樹數目必須是正整數的性質，求出相對極大值。此題除少數特優的學生外，難以得分。本年度試題中，採連鎖命題者，以此二題最有意義。

三、計算題部分

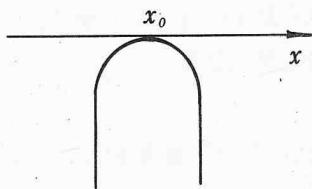


第一題：已知 $\angle A = 12^\circ$ ， $\angle B = 64^\circ$ ， $\angle C = 46^\circ$ ， $\angle D = 28^\circ$ ，求 $\angle AED$ 之度數？

(分析)：第一題係利用三角形內角和及外角性質，但圖形富於變化，可測出學生對平面上圖形的瞭解程度。

- 第3題：已知函數 $y = (k - 2)x^2 - \sqrt{7}x + (k - 5)$ 之圖形下，求 $k = ?$ 及 x_0 之坐標？

(圖中 y 軸之正向向上)



(分析)：第3題頗為精彩，能測出學生在二次函數方面的程度，有關判別式與 x 軸之交點關係，拋物線頂點在上，在下與 x^2 係數之關係，須能靈活運用，否則難以得分。可惜未劃出 y 軸。對部分考生之思考造成困惑。

四、證明題部分

1. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，但 $\angle A < 80^\circ$ ，試證 $\angle B > 50^\circ$ 。

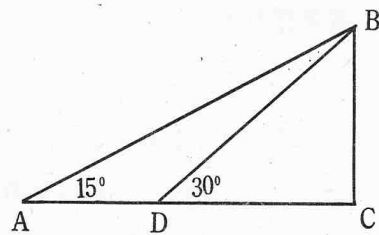
(分析)：本題係利用 \triangle 三內角和 180° ，大邊對大角以及不等式的代數運算求證。它的特點在化定性為定量，可測出考生的理解能力。

2. 已知 $a > b > 0$ ， $c > 0$ ，試證 $b : c < (b + c) : (a + c)$

(分析)：這是 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$ 的變化，在證明真分數分子，分母加相同正數，其值增大。只是很簡單的不等式證明，但改為比的大小比較後，顯得有些變化，但一般考生尚能適應。

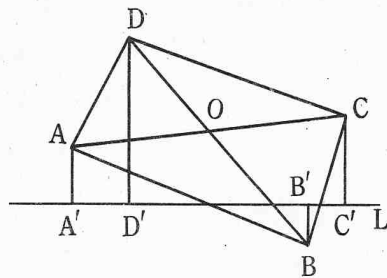
3. 利用下圖，試證 $\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$ (即 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$) (提示：可設 $\overline{BC} = 1$)

(分析)：本題有圖形再加上提示，學生均可由正弦函數的定義證出，但有些教師早已對此類問題予以反覆訓練，部分學生稍占便宜。但此題給予考生提示可給今後命題者一個新的方向。即某些稍稍超出範圍的試題，均可給予適當提示做為思考線索，以測量考生較高層次的推理能力。



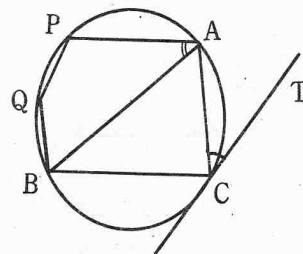
4. $ABCD$ 為一平行四邊形，直線 L 與 \overline{AB} 、 \overline{BC} 相交，自 A, B, C, D 分別向 L 作垂線依次交 L 於 A', B', C', D' ，試證 $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{DD'}$

(分析)：本題係課本例題加以改變而成，但證明所引用之性質不同，課本僅須利用梯形中線長等於上、下底和的一半即可得證。而本題尚須引用梯形兩對角線中點聯線等於上、下底差的一半，始奏全功。但不失為課本改編題的良好範例。但就筆者所知，某些國中月考考題曾經出現。



5. 如下圖，已知 $\triangle ABC$ 內接於一圓，作弦 $\overline{AP} \parallel \overline{BC}$ ，弦 $\overline{BQ} \parallel \overline{AC}$ 及切線 \overline{CT} 。試證 $\overline{PQ} \parallel \overline{CT}$ 。

(分析)：本題系利用平行線性質，平行線截等弧以及等弧夾等圓周角性質，依序推理而得證。一般考生不易得分，可測出考生是否能將課本內的基本圖形和基本原理加以融合運用。



五：各册考題分配表如下：

	一	二	三	四	五	六	合計
選擇	0	12	0	12	3	13	40
填充	3	3	0	6	6	12	30
計算	0	0	0	10	5	5	20
證明	0	0	6	0	18	6	30
合計	3	15	6	28	32	36	120

由考題分配表，很清楚地看出第一册3分，第二册15分，第3册6分，第四册28分，第五册32分，第六册36分，合計120分。第六册所占比重之大為歷年來所僅見。

(選修上、下冊之內容均已列入範圍相近的各單元中合併計算)

肆、今年聯考試題之商榷

一、試題分配不均

由於題數減少，部分考題占分過重，某些單元成為命題焦點。三角之重要性固不待言，但以本次三角部分占27分而言，似乎已超過三角函數在國中教材之比重。相反地，一元二次方程式之解法，虛數的運算，根與係數的關係，未能在試題中出現，不能不說是一大疏忽。

二、未能掌握國中教材之精神

學者專家未在國中從事數學教學工作，對國中生程度無法確切掌握是可以了解的。但是在命題前若未能仔細閱讀全部教材，以致依憑個人既有之認識出題則令人無法理解。像一元二次方程式完全未在考題中出現，頗令人感到迷惑。以國中教材的內涵和精神而言，關於平面座標之條件有明確規定，而試題中所有函數圖形的 y 軸都未標明，以此測驗學生的應變能力固無可厚非，若造成學生困惑，以致無法測出學生真實程度，反而得不償失。

三、連鎖題的計分不當

連鎖題的採用，在台北區高中聯考尚屬首創（其他考區早已採用多年）。以選擇題2~5題而言，應採連坐法記分，但說明中有每題2分字樣。因此失去命題原意。其次，高中數學命題一向有計算和證明，足以評量學生是否能完整概念，或了解其解題的思考過程。當然在選擇，填充部分若能適當採用連鎖題，亦有助題目之變化和靈活。

四、命題仍不脫昔日窠臼

根據報章雜誌的報導，一般考生多認為此次命題靈活、創新。但詳加分析即可發現與歷年來台灣各考區試題雷同，相信教學經驗豐富的老師都能輕易舉證。事實上，在國中數學的領域中，命題要大幅創新既非易事也無必要。但憑心而論，命題者已竭盡心力在求變化創新，尤其在命題的技術上，由於專家的指導確實有所改進。

伍、結 論

聯考領導教學乃是不爭的事實，若能善於命題來導引國中數學科的教學正常化，合理化，未嘗不是一件可喜之事。台北區高中聯招，由於全省各國中學生紛紛赴考，可說已具「大專聯考的雛形」，由於各方矚目，命題時面臨的心理壓力也較其他考區為重。多年來命題者均以穩重為先，以免遭致責難。此次由於學者專家的參與，令國中數學老師倍感興奮。尤其多項命題上的革新改進措施，足以提示教學過程中某些易受疏忽的因素。當然高中聯考的試題究竟應以測量學生國中數學教材的理解程度為先，抑或以挑選高中所需要之學生為重，仍需教育當局深入研究。本文僅從一個國中數學教師的立場，針對本年度的數學試題加以評析，表達對國中數學教育關心之意，疏漏偏頗之處所在多有，尚祈專家指正。

本文作者現任教台北介壽國中及
台北市國中數學科輔導員