從70年聯考之來龍去脈談如何準備數學

王 秋 夫

在今年三月份出版之「數學傳播季刊」第五卷第一期，我曾介紹了一種準備聯考之複習捷徑，「追踪拿分術」，頗得很多數學先進和同學之讚賞，而聯考後證明本人之方法確實有效，今年聯考之每一個題目幾乎都可用考古題利用「追踪拿分術」之觀點很順利地得到解答。我想這也是今年平均分數普遍提高之原因之一。

茲將今年聯考試題之特色介紹如下：

1. 全是考古題之結合。（從67、68、69三年好好研究，就可拿很多分）
2. 題型普遍，而難易度適中，中上程度學生容易發揮且層次分明。
3. 題目少，而分佈不均，容易造成學生投機心理。
4. 簡單之基本分數較多（甲丙組至少有55分，乙丁組至少有64分），組距很大，較易甄別學生程度。
5. 很多用方法代公式之題目。
6. 各組之高低標準普遍提高，可鼓舞學生研習興趣。

㈠ 從67年考題「辛」定義：若經由平移，旋轉後，曲線 r_1 可以重疊在另一曲線 r_2 上，則稱 r_1 與 r_2 全等，考慮下列諸曲線：(A) $xy=1$ (B) $x^2-y^2=1$ (C) $y^2-x^2=2$ (D) $\sqrt{3}(x^2-y^2)+2xy-4=0$ (E) $2x^2-3xy-2y^2=2$，其中有些（其個數≥2）是全等的而其餘均不全等，請在答案卡上挑出全等的來。

解：此題為簡化二元二次方程式之問題，利用

$a'+c'=a+c$，

$a'-c'=\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}$

(A) $xy=1$ 標準化可得 $x'^2-y'^2=2$

或 $y'^2-x'^2=2$

(D) $\sqrt{3}(x^2-y^2)+2xy-4=0$，

標準化得可得 $x'^2-y'^2=2$

或 $y'^2-x'^2=2$

(E) $2x^2-3xy-2y^2=2$，標準化得

$y'^2-x'^2=4/5$ 或

$x'^2-y'^2=4/5$

故選(A)(C)(D)。

分析與整理：若您此時將二元二次方程式

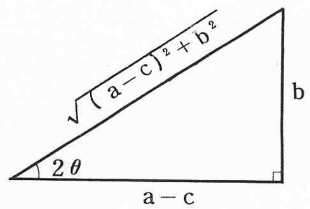
$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \cdots\cdots (A)$$

作如下之整理，相信定可穩拿70年甲題坐標變換之考題。

① 若 $b^2-4ac=0$ 先旋轉後平移，將(A)旋轉一 θ 角使(A)成

$$a'x'^2+c'y'^2+d'x'+e'y'+f=0 \cdots (B)$$

其中 $\cot 2\theta=(a-c)/b$



$$\begin{cases} a'+c'=a+c \\ a'-c'=\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2} \end{cases}$$

（±取與 b 同號）

	d	e
d'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
e'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

$$\therefore \begin{cases} d'=d\cos\theta+e\sin\theta \\ e'=-d\sin\theta+e\cos\theta \end{cases}$$

然後再將(B)配方變成標準式。

② 若 $b^2-4ac\neq 0$ 先平移後旋轉使(A)成

$$ax'^2+bx'y'+cy'^2+f'=0 \cdots\cdots (C)$$

$$f'=\frac{1}{2}(dh+ek+2f)$$

其中 $h=\dfrac{2cd-be}{b^2-4ac}$，$k=\dfrac{2ae-bd}{b^2-4ac}$

即解 $\begin{cases} 2ax+by+d=0 \\ bx+2cy+e=0 \end{cases}$

之（x，y）即（h，k）爲(A)之對稱中心，再將(C)旋轉一θ角使成$a'x''^2+c'y''^2+f'=0$即爲所求a'，c'及θ求法如①。

甲 給橢圓$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$，試將坐標軸繞原點轉動$\theta$角（$-\pi/2<\theta<\pi/2$），使$x$軸與橢圓之長軸重合。又設橢圓至原點的最遠距離爲$a$，最近距離爲b，（都取一位有效數字），故$a$，$b\in A$，則

1. (A) $\theta=\pi/6$ (B) $\theta=\pi/4$ (C) $\theta=\pi/3$ (D) $\theta=-\pi/6$ (E) $\theta=-\pi/6$
（單選，4分，答錯倒扣4／4分）。

2. (A) $a\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $a\in\{2,3,6,7\}$
(C) $a\in\{4,5,6,7\}$
(D) $a\in\{8,9\}$
（複選，3分，答錯倒扣3／8分）。

3. (A) $b\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $b\in\{2,3,6,7\}$
(C) $b\in\{4,5,6,7\}$
(D) $b\in\{8,9\}$
（複選，3分，答錯倒扣3／8分）。

解答： 1.(A) 2.(B) 3.(A)

由 $\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}=\dfrac{7-13}{-6\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ 2\theta=\pi/3\Rightarrow\theta=\pi/6$

$A'+C'=7+13=20$ ……………………①

$A'-C'=\sqrt{(7-13)^2+(-6\sqrt{3})^2}$
$=\sqrt{3}b+108=-12$…………②

①＋②得 $A'=4$；①－②得 $C'=16$

$\therefore$ 旋轉後得 $4x'^2+16y'^2=16$

$\therefore\ \dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{1}=1$

$\therefore\ a=2,\quad b=1$

註： 1. 63年考過二次曲線$5x^2+5y^2-6xy-4=0$，(A)是一雙曲線，(B)是一橢圓，(C)二對稱軸爲$x-y=0$及$x+y=0$，(D)二焦點爲（$\sqrt{b}/2$，$\sqrt{b}/2$）及（$-\sqrt{b}/2$，$-\sqrt{b}/2$），(E)二焦點之距離爲$\sqrt{6}$。（答：(B)(C)(E)，

2. 67.年夜聯考過二次曲線$4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$之中心爲（p，q），離心率爲r，兩個準線之截距分別爲α及β，試分別求出之

(1) (A) $|10p|\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $|10p|\in\{2,3,6,7,8\}$
(C) $|10p|\in\{4,5,6,7\}$
(D) $|10p|\in\{1,3,5,7,9\}$
(E) $p>0$

(2) (A) $r>1.5$ (B) $r>0.5$
(C) $\alpha+\beta=1$ (D) $|\alpha|$及$|\beta|$均小於1 (E) $10\alpha\beta=2$

（答：(1)(A)(C)(D)(E)；(2)(A)(B)(C)(D)(E)）

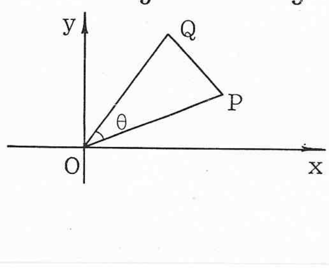
3. 讀者很明顯地可知本題與63.年考題很相近。

㈢ 從63.年及66.年之向量考題，亦可推出本年乙題之向量考題。

(1) 63年(5)在平面上給與兩點$P(4,3)$，$Q(3,4)$，作向量$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OQ}$（$O$表示原點），則
(A)內積$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=24$
(B) P點到直線$\overleftrightarrow{OQ}$之距離爲$7/5$
(C)內量$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$之長度爲10
(D)向量$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$之長度爲2
(E) $a\triangle OPQ=7/2$

解： 1. $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OP}=[4,3]$，
$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OQ}=[3,4]$
$\therefore\ |\overrightarrow{OP}|=5$，$|\overrightarrow{OQ}|=5$
$a:b=[4,3]\cdot[3,4]$
$=4\cdot3+3\cdot4=24$

2. $\overleftrightarrow{OQ}$之方程式爲$y=4x/3$，
即 $4x-3y=0$
$\therefore$ 點P到直線$\overleftrightarrow{OQ}$之距離爲
$\left|\dfrac{4\times4-3\times3}{5}\right|=\dfrac{7}{5}$



或利用$\overrightarrow{OP}$在$\overleftrightarrow{OQ}$方向上夾角之正弦值解之亦可：

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{24}{25}$$

∴ $\sin\theta = \dfrac{7}{25}$

∴ P到$\overleftrightarrow{OQ}$之距離爲

$$|\vec{a}|\sin\theta = 5\times\frac{7}{25} = \frac{7}{5}$$

3. $\vec{a}+\vec{b} = [4+3, 3+4] = [7, 7]$

∴ $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{7^2+7^2} = 7\sqrt{2}$

$\vec{a}-\vec{b} = [4-3, 3-4]$

$= [1, -1]$

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

4. $a\triangle OPQ = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}|16-9| = 7/2$

故選 (A)(B)(E)

分析與整理：若您將解此題所涉及之觀念與公式加以適當地整理就可穩拿70.年乙丁組之甲題和甲丙組之乙題。

1. $\overrightarrow{X} = [x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n]$，
$\overrightarrow{Y} = [y_1, y_2 \cdots\cdots, y_n]$．
$\Rightarrow \overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots\cdots + x_ny_n$
$= |\overrightarrow{X}|\,|\overrightarrow{Y}|\cos\theta \in R$

2. $\overrightarrow{X} = [x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n]$，
$\overrightarrow{Y} = [y_1, y_2, \cdots\cdots y_n]$
$\Rightarrow |\overrightarrow{X}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2}$
$\overrightarrow{X}\pm\overrightarrow{Y} = [x_1\pm y_1, x_2\pm y_2, \cdots\cdots x_n\pm y_n]$

3. $\overrightarrow{X}$在$\overrightarrow{Y}$之方向上之投影量爲
$$\overrightarrow{X}\cos\theta\,|u| = |\overrightarrow{X}|\cos\theta = \frac{\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y}}{|\overrightarrow{Y}|}$$
$\overrightarrow{X}$在$\overrightarrow{Y}$之方向上之投影爲
$$|\overrightarrow{X}|\cos\theta\,|u| = |\overrightarrow{X}|\frac{\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y}}{|\overrightarrow{X}|\,|\overrightarrow{Y}|}\frac{\overrightarrow{X}}{\overrightarrow{Y}}$$
$$= \frac{(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y})\overrightarrow{Y}}{|\overrightarrow{Y}|^2}$$

4. 設O，A，B不共線且
$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = [a, b]$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = [c, d]$
$\Rightarrow a\triangle AOB$
$= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\,/\,2$
$= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c & 0 & a \\ b & d & 0 & b \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\,|ad-bc|$

5. 若$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$\cdots\cdots P_n(x_n, y_n)$爲凸$n$邊形之面積爲
$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots\cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

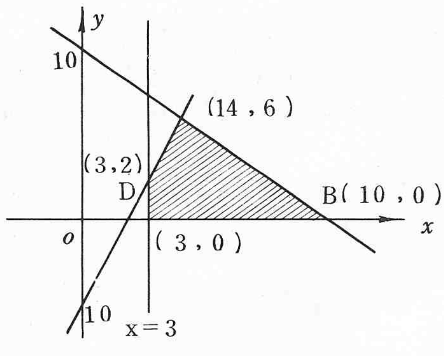
【甲】平面上四直線$x=3$，$y=0$，$x+y=10$及$4x-y=10$圍成一個四邊形區域，計算這個區域的面積S。

設$S = 10p+q$，p，$q\in A$，則

1. (A) $p\in\{1, 3, 5, 7, 9\}$
(B) $p\in\{2, 3, 6, 7\}$
(C) $p\in\{4, 5, 6, 7\}$
(D) $p\in\{8, 9\}$
(E) $p\in\{0\}$

2. (A) $q\in\{1, 3, 5, 7, 9\}$
(B) $q\in\{2, 3, 6, 7\}$
(C) $q\in\{4, 5, 6, 7\}$
(D) $q\in\{8, 9\}$
(E) $q\in\{0\}$

（以上兩小題皆複選，全對得8分，答錯倒扣8／99分）。



甲解：由作圖及解聯立方程式和其四頂點之坐標$A(3, 0)$，$B(10, 0)$，$C(4, 6)$，$D(3, 2)$故所得四邊形區域之面積爲

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 10 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\mid 60+8-18-6\mid=\frac{1}{2}\times 44=22$$

$\therefore\ p=2,\ q=2$

故　1.選(B)　2.選(B)

註：1. 64.年亦考過平面上有三點 $O(0,0)$，$P(4,3)$，$Q(4,4)$ 所圍成三角形 $\triangle OPQ$ 之面積爲何？

2. 60.年考過在 xy 平面上，$T=\{(x,y)\mid |x-5|-x|\leq y\leq 15-x\}$ 求各頂點之坐標及此區域之面積。

3. 61.年考過設 x，y 滿足不等式 $2\leq x\leq 5$，$x+y\leq 8$，$x+3y\geq 5$，此時 $2x+y+3$ 之最大値爲何？

乙　66.年(2)在 (X,Y,Z) 坐標空間中，π 爲過 $(2,1,-1)$，$(1,2,-1)$ 及 $(1,1,3)$ 的平面，π' 爲過 $(1,0,1)$ 及 $(0,-2,1)$ 而與 π 正交的平面，若 π' 的方程式爲 $ax+by+cz=1$，則(A) a，b，c 皆爲整數　(B) $a+b+c>0$　(C) $abc>0$　(D) $b^2-4ac>0$　(E) $(a-b)(b-c)(c-a)>0$

解：1. 設 $A(2,1,-1)$，$B(1,2,-1)$，$C(1,1,3)$，$D(1,0,1)$；$E(0,-2,1)$

2. $\overrightarrow{AB}=〔-1,1,0〕$，$\overrightarrow{AC}=〔-1,0,4〕$，設平面 π 之法向量爲 $〔a_1,b_1,c_1〕=N_1$ 則由 $\overrightarrow{N_1}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow -a_1+b_1+c_1=0$ ……①　由 $\overrightarrow{N_1}\perp\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow a_1+b_1+4c_1=0$ ……②

3. 由①，②知

$$a_1:b_1:c_1=\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0&-1\\4&-1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1&1\\-1&0\end{vmatrix}=4:4:1$$

$\therefore\ \overrightarrow{N_1}=\{4,4,1\}$

4. 又 $\pi'=ax+by+cz=1$ 之法向量爲 $\overrightarrow{N}=\{a,b,c\}$，而 π 與 π' 正交

$\therefore\ N_1\perp N$

$\therefore\ 4a+4b+c=0$ ……③

5. 而 $D(1,0,1)$，$E(0,-2,1)$ 皆在 π' 上，

$\therefore\ a+c=1$ ……④

$-2b+c=1$ ……⑤

6. 解③，④，⑤得　$a=1$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=2$，故知 $a+b+c>0$，$b^2-4ac>0$，$(a-b)(b-c)(c-a)>0$

7 故選(B)(D)(E)。

分析與整理：若您將解此題所涉及之概念加以整理就可迅速解出70.年乙題。

1. $P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$ $\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=〔x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1〕$

2. $\overrightarrow{A}=〔x_1,y_1,z_1〕$，$\overrightarrow{B}=〔x_2,y_2,z_2〕$ 若 $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}\Rightarrow A\cdot B=0$ $\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

3. 平面之一般式爲 $ax+by+cz+d=0$，其中法向量 $\overrightarrow{N}=〔a,b,c〕$，法向量必垂直平面上每一條直線而平面之點向式爲 $a(x-x_0)+b。(y-y_0)+c(z-z_0)=0$，其中 $\overrightarrow{N}=〔a,b,c〕$，$\overrightarrow{P}(x_0,y_0,z_0)\in E$

4. 過三點 $P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$，$R(x_3,y_3,z_3)$ 之平面方程式爲 $\begin{vmatrix}x-x_3&y-y_3&z-z_3\\x_1-x_3&y_1-y_3&z_1-z_3\\x_2-x_3&y_2-y_3&z_2-z_3\end{vmatrix}=0$

【乙】通過三點 P，Q，R 的平面 π 有法線向量 $3i-2j-4k$。P 點的坐標是 $(3,-2,-4)$，而 Q，R 兩點在 (x,y) 平面上的投影分別是 $Q_1(9,3)$，$R_1(7,2)$ 兩點，試求：有向線段 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PR}$ 所代表的向量之內積。設內積爲 $10p+q$，p，$q\in A$；則

4. (A) $p\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $p\in\{2,3,6,7\}$
(C) $p\in\{4,5,6,7\}$
(D) $p\in\{8,9\}$
(E) $p\in\{0\}$

5. (A) $q\in\{1,3,5,7,9\}$

(B) $q\in\{2,3,6,7\}$

(C) $q\in\{4,5,6,7\}$

(D) $q\in\{8,9\}$

(E) $q\in\{0\}$

（以上二小題，全對得10分，答錯倒扣$\frac{10}{99}$分）。

乙解：∵ 平面π之法向量為$\vec{N}=[3,-2,-4]$且過點$P(3,-2,4)$

∴ π之方程式為

$3(x-3)-2(y+2)$

即 $3x-2y-4z-29=0$

∵ $Q(9,3,a)$在π上，

∴ $27-6-4a-29=0$

∴ $a=-2$

$R(7,2,b)$在π上，

∴ $21-4-4b-29=0$

∴ $b=-3$

∴ $\overrightarrow{PQ}=[6,5,2]$，

$\overrightarrow{PR}=[4,4,1]$，

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=24+20+2=46$

∴ $P=4$，$Q=6$

故 4. 選(C)，5. 選(B)(C)

註：1. 另解：π之法向量$\vec{N}=[3,-2,-4]$，$\vec{P}=[3,-2,-4]$，$Q=[9,3,a]$，$R=[7,2,b]$

2. ∴ $\overrightarrow{PQ}=[6,5,a+4]$，

$\overrightarrow{PR}=[4,4,b+4]$

∵ $N\perp$平面π

∴ $N\perp\overrightarrow{PR}\Rightarrow 18-10-4(a+4)=0$

∴ $a=-2$，

$\vec{N}\perp\overrightarrow{PR}\Rightarrow 12-8-4(b+4)=0$

$\Rightarrow b=-3$

3. $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=[6,5,2]\cdot[4,4,1]=24+20+2=46$

∴ $p=4$，$q=6$

∴ 4. 選(C)，5. 選(B)(C)。

(三) 從50年之考題可推出70年丙題

設a，b，c為三角形之三邊，且$a-2b+c=0$，$3a+b-2c=0$，求(1) $\sin A:\sin B:\sin C$ (2) $\cos A:\cos B:\cos C$ (3) $\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$之值。

解：1. 由 $a-2b+c=0$及$3a+b-2c=0$得

$$a:b:c=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&1\\-2&3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}=3:5:7$$

2. ∴ $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7=a:b:c$

3. $$\cos A:\cos B:\cos C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}:\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$$

$$=\frac{65}{35}:\frac{33}{21}:\frac{-15}{15}=13:11:-7$$

4. ∴ $\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$

$=2\sin A\cos A:2\sin B\cos B:2\sin C\cos C$

$=3\times 13:5\times 11:7\times(-7)$

$=39:55:-49$

分析與整理：若您將解此題所涉及之概念加以整理，可迅速解70.丙題。

1. $$\begin{cases}a_1x+b_2y+c_1z=0\\a_2x+b_2y+c_2z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x:y:z=\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$$

2. 正弦定律：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

∴ $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:$

$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，

$c=2R\sin C$

3. 餘弦定律：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

【丙】已知 $x+3y+5z=0$，且 $2x+4y+7z=0$；試把

$$\frac{3x^2-4y^2+4z^2-2yz-4zx+5xy}{2x^2+4y^2+4z^2}$$

化為最簡分數 q/p，其中 $p\in A$，$q\in A$，則

6. (A) $p\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $p\in\{2,3,6,7\}$
(C) $p\in\{4,5,6,7\}$
(D) $p\in\{8,9\}$
注意：先寫分母 p，再寫分子 q。

7 (A) $|q|\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $|q|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|q|\in\{4,5,6,7\}$
(D) $|q|\in\{8,9\}$
(E) $q\leq 0$
（以上二小題，全對得10分，答錯倒扣10／110分）

丙解：由 $x:y:\begin{vmatrix}3&5\\4&7\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}5&1\\7&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}$

$=1:3:-2$

$\therefore\ x=k$，$y=3k$，$z=-2k$ 代入得

$$\frac{3x^2-4y^2+4z^2-2yz-4zx+5xy}{2x^2+4y^2+4z^2}$$

$$=\frac{18k^2}{54k^2}=\frac{1}{3}\quad\therefore\ p=3,\ q=1$$

故　6.選(A)(B)　7選(A)

【丁】試解聯立方程組

$$\begin{cases}x+xy=35\\y+xy=32\end{cases}$$

可得到兩組解 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2)，其中 $x_1<x_2$，$x_1,x_2,y_1,y_2\in A$，先寫第一組解 (x_1,y_2)，則

8. (A) $|x_1|\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $|x_1|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|x_1|\in\{4,5,6,7\}$
(D) $|x_1|\in\{8,9\}$
(E) $x_1\leq 0$

9. (A) $|y_1|\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $|y_1|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|y_1|\in\{4,5,6,7\}$
(D) $|y_1|\in\{8,9\}$
(E) $y_1\leq 0$
（以上二小題皆複選，全對得7分，答錯倒扣7／360分）。

再寫第二組解 (x_2,y_2)，則

10. (A) $|x_2|\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $|x_2|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|x_2|\in\{4,5,6,7\}$
(D) $|x_2|\in\{8,9\}$
(E) $x_2\leq 0$

11. (A) $|y_2|\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $|y_2|\in\{2,3,6,7\}$
(C) $|y_2|\in\{4,5,6,7\}$
(D) $|y_2|\in\{8,9\}$
(E) $y_2\leq 0$
（以上二小題皆複選，全對得7分，答錯倒扣7／360分）

丁解：$\begin{cases}x+xy=35\cdots\cdots①\\y+xy=32\cdots\cdots②\end{cases}$

①－②得　$x-y=3\cdots\cdots③$

以 $x=y+3$ 代入①得

$y+3+(y+3)y=35$

$y+3+y^2+3y=35$

$\therefore\ y^2+4y-32=0$

$(y+8)(y-4)=0$

$\therefore\ y=-8$ 或 4

當 $y=-8$ 代入③得　$x=-5$

$y=4$ 代入③得　$y=7$

故　8.選(A)(C)(E)，9.選(D)(E)，10.選(A)(B)(C)，11.選(C)

【丁】試解聯立方程組

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=50\\yz-zx+xy=7\\-yz-zx+xy=47\end{cases}$$

8. 共有幾組解？（重根不要重複計算）
(A) 1組　(B) 2組　(C) 4組　(D) 6組　(E) 8組
（單選，2分，答錯倒扣2／4分）

9. 共有幾組實解？
(A) 1組　(B) 2組　(C) 4組　(D) 6組　(E) 8組

（單選，2分，答錯倒扣2／4分）

（接上題）從實解中，挑出 x 最大的那一組，如果不只一組，再從其中挑出 y 最大的，若還不只一組，就再挑 z 較大的；必要時，四捨五入，如此得一組解（x，y，z），x，y，$z \in A_1$，則

10. (A) $|x| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(B) $|x| \in \{2, 3, 6, 7\}$
(C) $|x| \in \{4, 5, 6, 7\}$
(D) $|x| \in \{8, 9\}$
(E) $x \leq 0$

（複選，4分，答錯倒扣4／18分）

11. (A) $|y| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(B) $|y| \in \{2, 3, 6, 7\}$
(C) $|y| \in \{4, 5, 6, 7\}$
(D) $|y| \in \{8, 9\}$
(E) $y \leq 0$

（複選，4分，答錯倒扣4／18分）

12 (A) $|z| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(B) $|z| \in \{2, 3, 6, 7\}$
(C) $|z| \in \{4, 5, 6, 7\}$
(D) $|z| \in \{8, 9\}$
(E) $z \leq 0$

（複選，4分，答錯倒扣4／18分）

丁解：
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \cdots\cdots\cdots ① \\ yz - zx + xy = 7 \cdots\cdots\cdots ② \\ yz - zx + xy = 47 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－②×2得　$(x - y + z)^2 = 36$

$\therefore$　$x - y + z = \pm 6$

①＋③×2得　$(x + y - z)^2 = 144$

$\therefore$　$x + y - z = \pm 12$,

②－③得　$yz = -20$

(1) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = 12 \\ yz = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y - z = 3 \\ yz = -20 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = -12 \\ yz = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y - z = -9 \\ yz = -20 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - y + z = -6 \\ x + y - z = 12 \\ yz = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y - z = 9 \\ yz = -20 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x - y + z = -6 \\ x + y - z = -12 \\ yz = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y - z = -3 \\ yz = -20 \end{cases}$

由此解得

x	3	3	-3	-3	9	9	-9	-9
y	5	4	-5	-4	$\frac{3+\sqrt{71}i}{2}$	$\frac{3-\sqrt{71}i}{2}$	$\frac{-3+\sqrt{71}i}{2}$	$\frac{-3-\sqrt{71}i}{2}$
z	-4	-5	4	5	$\frac{-3+\sqrt{71}i}{2}$	$\frac{-3-\sqrt{71}i}{2}$	$\frac{-3+\sqrt{71}i}{2}$	$\frac{-3-\sqrt{71}i}{2}$

故　8.選(E)，9.選(C)，10.選(A)(B)，11.選(A)(C)
12選(C)(E)

註：1. 67.年夜間部聯招曾考過，很相近之類似題：
解聯立方程式
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = -(9x + 27)y \\ x^2 + xy + y^2 = 3x + 9 \end{cases}$$
設有解答（x_1，y_1），（x_2，y_2）……等等，且 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots\cdots$

(1) (A)一共有四組解答　(B)諸 x_i 均爲實數　(C)諸 y_i 均爲實數　(D)在 y_i 中有一對不是實數
(E)在 x_j 中有一對不是實數

(2) (A) $|x_1| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(B) $|x_1| \in \{2, 3, 6, 7, 9\}$
(C) $x_1 > 0$
(D) $|y_1| \in \{1, 3, 5, 7\}$
(E) $|y_1| \in \{8, 9, 0\}$

(3) (A) $|x_2| \in \{2, 3, 6, 7, 8\}$
(B) $|x_2| \in \{4, 5, 6, 7\}$
(C) $|y_2| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(D) $|y_2| \in \{4, 5, 6, 7\}$
(E) $x_2 > 0$，$y_2 > 0$

(4) (A) $x_3 = x_4$　(B) $y_3 = -3$
(C) $y_3 + y_4 = 3$　(D) $|y_3| = \frac{3}{2}$
(E) $|y_3| = 3$

（答案(1)選(A)(B)(C)，(2)選(B)(C)(D)，(3)選(A)(C)，(4)選(A)(C)(E)）

2. 67.年夜間部之出題形式很像今年之〔甲〕，〔丁〕二題模式，我猜想很可能70.命題教授至少有一位是67.年夜間部考題之命題人。

(五) 從51.年及58.年夜聯與69.年考題可推出70.年「戊」

(1) 51年(3)：兩三角形內有一角彼此相等，或互補，則此兩三角形面積之比等於夾此角兩邊乘積之比。試證之。

即：設$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$中

$\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A+\angle A'=180^\circ$。

求證：

$$\frac{a\triangle ABC}{a\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$$

解：1. $\because$ $\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A+\angle A'=\pi$

則 $\sin A=\sin A'$

2. $\therefore$ $$\frac{a\triangle ABC}{a\triangle A'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A}{\frac{1}{2}A'B'\cdot A'C'\cdot\sin A'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$$

(2) 58年夜聯：若在$\triangle ABC$三邊，AB，BC，CA上依次取D，E，F三點使

$$\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{1}{3}$$

則 $a\triangle ABC:a\triangle DEF=$

(A) 16 : 7 (B) 3 : 1 (C) 4 : 7

(D) 12 : 7 (E) 9 : 4

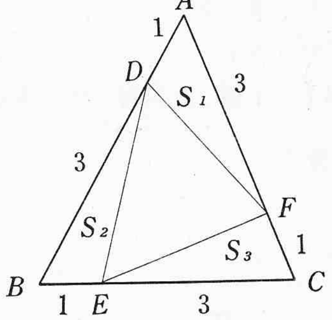
解：1. 令 $\triangle ABC$之面積為S，

則 $\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{AD\cdot AF}{AB\cdot AC}=\dfrac{1\cdot 3}{4\cdot 4}=\dfrac{3}{16}$

2. 同理 $\dfrac{S_2}{S}=\dfrac{S_3}{S}=\dfrac{3}{16}$

3. 故 $a\triangle DEF=1-\left(\dfrac{S_1}{S}+\dfrac{S_2}{S}+\dfrac{S_3}{S}\right)=\dfrac{7}{16}$

4. 故 $\dfrac{a\triangle ABC}{a\triangle DEF}=\dfrac{16}{7}$，故選(A)



(3) 69.「癸」：在$\triangle ABC$之三邊，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$及$\overline{AB}$上分別取點D，E，F，$\overline{BD}=\overline{DC}$，$\overline{CE}=2\overline{EA}$，$\overline{AF}=3\overline{FB}$

設三直線$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$所圍成三角形之面積為δ，而$\triangle ABC$之面積為$\triangle$，設

$$\frac{\delta}{\triangle}=\frac{p\cdot 10^2+q\cdot 10+r}{252}$$

其中p，q，$r\in A$，則

(A) $p\in\{1,3,5,7\}$

(B) $p\in\{4,5,6,7\}$

(C) $q\in\{2,3,6,7\}$

(D) $q\in\{8,9\}$

(E) $r\in\{1,3,5,7\}$

解：1. 如圖由Menelaus定理知$\triangle ABC$中$\Rightarrow$

$$\frac{AP}{PD}\times\frac{DC}{CB}\times\frac{BF}{FA}=1$$

$$\Rightarrow\frac{AP}{PD}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=1\quad\therefore\ \frac{AP}{PD}=\frac{6}{1}$$

2. $\triangle BCE$中$\dfrac{BQ}{QE}\times\dfrac{EA}{AC}\times\dfrac{CD}{DB}=1$

$$\Rightarrow\frac{BQ}{QE}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{1}=1\quad\therefore\ \frac{BQ}{QE}=\frac{3}{1}$$

3. $\triangle ACF$中$\dfrac{CR}{CF}\times\dfrac{FB}{BA}\times\dfrac{AE}{EC}=1$

$$\Rightarrow\frac{CR}{RF}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=1\quad\therefore\ \frac{CR}{RF}=\frac{8}{1}$$

4. $\dfrac{a\triangle APC}{a\triangle ADC}=\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{6}{7}$ ……………………①

$\dfrac{a\triangle ADC}{a\triangle ABC}=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{1}{2}$ ……………………②

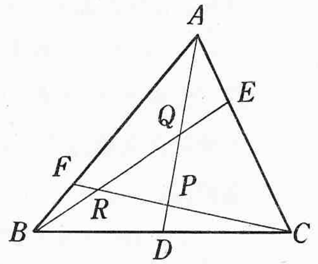
5. ①×②得 $\dfrac{a\triangle APC}{a\triangle ABC}=\dfrac{3}{7}$

同理 $\dfrac{a\triangle AQC}{a\triangle ABC}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a\triangle BCR}{a\triangle ABC}=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{9}$

6. $\therefore$ $\dfrac{S}{\triangle}=\dfrac{a\triangle PQR}{a\triangle ABC}=1-\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{25}{252}$

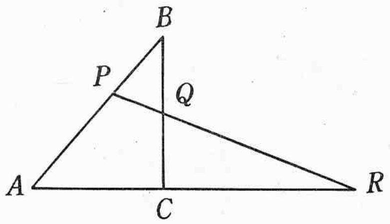
$\therefore\ p=0,\ q=2,\ r=5$，故選(C)(E)



分析與整理： 1. 本題利用Menelaus定理，若有一直線與$\triangle ABC$之三邊AB，BC，CA或其延長線上相交於P，Q，R，則 $\dfrac{AP}{PB}\times\dfrac{BQ}{QC}\times\dfrac{CR}{RA}=1$

或 $\dfrac{BQ}{QC}\times\dfrac{CR}{RA}\times\dfrac{AP}{PB}=1$

2. 若兩三角形中有一角相等或互補，則其面積的比等於夾此角兩邊乘積的比。



(4) 68年（甲）線段$AB=12$，在線段上任取一點P，則兩線段AP，PB長度的積$f(P)$之極大值M爲何？

(A)$M=18$ (B)$M=16$ (C)$M=24$

(D)$M=36$ (E)$M=48$

（接上題）P任意取試計算$f(P)>\dfrac{M}{2}$之機率到兩位有效數字$10^{-1}p+q\cdot10^{-2}$，p，$q\in A$，求p，q

解：1. 令 $AP=x$，$PB=12-x$

$\therefore\ f(P)=AP\cdot PB=x(12-x)$

$=-x^2+12x=-(x-6)^2+36$

2. 當$x=36$時，$M=36$ 故選(D)

3. $f(P)=x(12-x)>\dfrac{M}{2}=18$

$\Rightarrow x^2-12x+18>0$

$\Rightarrow 6-3\sqrt{2}<x<6+3\sqrt{2}$

4 所求機率爲

$$\frac{(6+3\sqrt{2})-(6-3\sqrt{2})}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$=0.707=0.71\ \ \therefore\ p=7,\ q=1$

【戊】在$\triangle ABC$三邊BC，CA，AB上分別取點D，E，F使得$\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{2}\dfrac{CE}{CA}$

變動D點也就變動了E，F兩點。問：如何取D點使得$\triangle DEF$的面積爲最小？假如這個最小面積爲$\triangle ABC$的$\dfrac{n}{m}$倍。$\dfrac{n}{m}$爲既約分數，而m，$n\in A$，則

(A)$m\in\{1,3,5,7,9\}$

(B)$m\in\{2,3,6,7\}$

(C)$m\in\{4,5,6,7\}$

(D)$m\in\{8,9\}$

14. (A)$n\in\{1,3,5,7,9\}$

(B)$n\in\{2,3,6,7\}$

(C)$n\in\{4,5,6,7\}$

(D)$n\in\{8,9\}$

(E)$n\in\{0\}$

（以上二小題，全對得7分，答錯倒扣$\dfrac{7}{26}$分）。

（接上題）如果我們完全隨機地在BC邊上取D點，D落在任一小段的機會和該小段的長度成正比。試計算：如此任取的$\triangle DEF$其面積大於（$\triangle ABC$面積／2）的機率。這機率可表爲

$1-\dfrac{\sqrt{\ell}}{k}$，k，$\ell\in A$，則

15. (A)$k\in\{1,3,5,7,9\}$

(B)$k\in\{2,3,6,7\}$

(C)$k\in\{4,5,6,7\}$

(D)$k\in\{8,9\}$

16. (A)$\ell\in\{1,3,5,7,9\}$

(B)$\ell\in\{2,3,6,7\}$

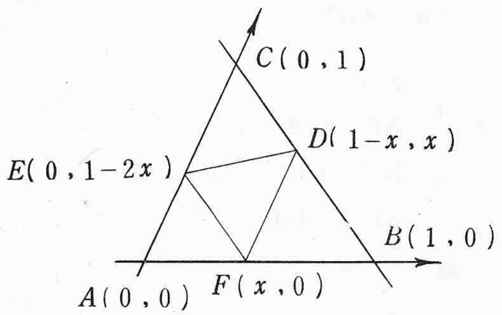
(C)$\ell\in\{4,5,6,7\}$

(D)$\ell\in\{8,9\}$

(E)$\ell\in\{0\}$

（以上二小題，全對得7分，答錯倒扣$\dfrac{7}{55}$分）

戊解：



取斜交坐標系 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$

令 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{2}\dfrac{CE}{CA}=x$

$0\leq x\leq 1$， ∴ $AF=xAB$，$BD=xBC$，$CE=2xCA$

故取 $F(x,0)$，$D(1-x,x)$，$E(0,1-2x)$

$$\therefore\ a\triangle DEF=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}1-x & 0 & x & 1-x\\ x & 1-2x & 0 & x\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|(1-x)(1-2x)-x(-x(1-2x)+x|$$

$$=\frac{1}{2}|(5x^2-4x+1)|$$

$$=\frac{1}{2}\left|5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\right|$$

當 $x=\dfrac{2}{5}$ 時，$a\triangle DEF$ 有最小面積為

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}$

而 $a\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\left|\begin{matrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\end{matrix}\right|=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ \frac{a\triangle DEF}{a\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$$

∴ $m=5$，$n=1$

(2) 由完全隨機地在 $\overline{BC}$ 上取一點 D

令 $\dfrac{BD}{BC}=x$ ∴ $0\leq x\leq 1$

使 $\dfrac{a\triangle DEF}{a\triangle ABC}>\dfrac{1}{2}$

∴ $5x^2-4x+1>\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 10x^2-8x+1>0$

$x<\dfrac{4-\sqrt{6}}{10}$ 或 $\dfrac{4+\sqrt{6}}{10}<x$

∴ 事件為 $0\leq x\leq\dfrac{4-\sqrt{6}}{10}$ 或 $\dfrac{4+\sqrt{6}}{10}<x\leq 1$

∴ 所求機率為

$$\frac{\frac{4-\sqrt{6}}{10}+\left(1-\frac{4+\sqrt{6}}{10}\right)}{1}=1-\frac{\sqrt{6}}{5}$$

∴ $k=5$，$\ell=6$ 故13.選(A)(C)，14.選(A)，15.選(A)(C)，16.選(B)(C)

註：1. (1)另解：設 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{2}\dfrac{CE}{CA}=x$

∵ D，E，F 分別在 BC，CA，AB 上

∴ $\dfrac{CE}{CA}=2x$，$0\leq 2x\leq 1$，

∴ $0\leq x\leq\dfrac{1}{2}$

令 $a\triangle ABC=S$，$a\triangle AEF=S_1$，$a\triangle BDF=S_2$，$a\triangle CED=S_3$

則 $\dfrac{S_1}{S}=x(1-2x)$

$\dfrac{S_2}{S}=x(1-x)$

$\dfrac{S_3}{S}=2x(1-x)$

$$\therefore\ \frac{a\triangle DEF}{a\triangle ABC}=\frac{a\triangle ABC-a\triangle AEF-a\triangle BDF-a\triangle CDE}{a\triangle ABC}$$

$$=1-\frac{S_1}{S}-\frac{S_2}{S}-\frac{S_3}{S}$$

$$=5x^2-4x+1$$

$$=\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$$

故當 $x=\dfrac{2}{5}$ 時，$\dfrac{a\triangle DEF}{a\triangle ABC}=\dfrac{1}{5}$ 為最小

$\therefore\ m=5,\ n=1$

【戊】在$\triangle ABC$的三邊BC，CA，AB上，分別取三點D，E，F使得

$$\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}=\frac{AF}{AB}$$

變動了D點也就變動了E，F兩點，問：如何取D點使得$\triangle DEF$的面積爲最小？假設這個最小面積爲$\triangle ABC$的面積之$\frac{n}{m}$倍，$\frac{n}{m}$爲既約分數，而m，$n\in A$，則

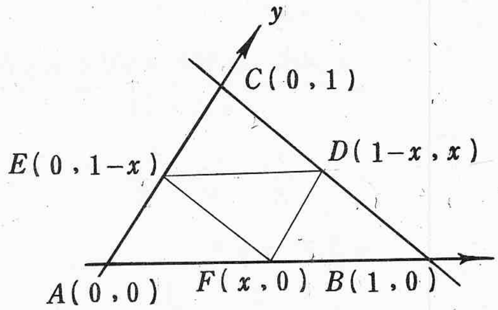
12 (A) $m\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $m\in\{2,3,6,7\}$
(C) $m\in\{4,5,6,7\}$
(D) $m\in\{8,9\}$

13. (A) $n\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $n\in\{2,3,6,7\}$
(C) $n\in\{4,5,6,7\}$
(D) $n\in\{8,9\}$
(E) $n\in\{0\}$

（以上兩小題皆複選，全對得8分，答錯倒扣8／26分）

（接上題）如果我們完全隨機地在BC邊上取D點，D落在任一小段的機會和該小段的長度成正比；試計算：如此任取的$\triangle DEF$其面積大於（$\triangle ABC$面積／3）的機率。這個機率可以表爲既約分數ℓ/k，而k，$\ell\in A$，則

14. (A) $k\in\{1,3,5,7,9\}$
(B) $k\in\{2,3,6,7\}$
(C) $k\in\{4,5,6,7\}$
(D) $k\in\{8,9\}$



戊解：(1)取斜交坐標系令$A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$

$\Rightarrow a\triangle ABC=\frac{1}{2}$

令 $\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}=\frac{AF}{AB}=x$

$\therefore\ BD=xBC$，$CE=xCA$，$AF=xAB$

故 $F(x,0)$，$E(0,1-x)$

$\Rightarrow D(1-x,x)$

$$a\triangle DEF=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x & 1-x & 0 & x\\ 0 & x & 1-x & 0\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x^2+(1-x)^2-x(1-x)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|3x^2-3x+1\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right|$$

當$x=\frac{1}{2}$隨即D爲BC中點時，$a\triangle DEF$爲最小爲$\frac{1}{8}$

$$\therefore\ \frac{a\triangle DEF}{a\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ m=4,\ n=1$

(2)由題意知令 $\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}=\frac{AF}{AB}=x$

$\therefore\ 0\le x\le 1$

$\frac{a\triangle DEF}{a\triangle ABC}>\frac{1}{3}$

$\therefore\ 3x^2-3x+1>\frac{1}{3}$

$\Rightarrow(3x-2)(3x-1)>0$

$\therefore\ 0<x<\frac{1}{3}$，或$\frac{2}{3}<x<1$

$\therefore$ 其機率爲

$$\frac{\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)}{1}=\frac{2}{3}$$

$k=3,\ \ell=2$

故 12選(C)，13.選(A)，14.選(A)(B)

(六) 從66年考題7及69年考題「庚」可推出70年「

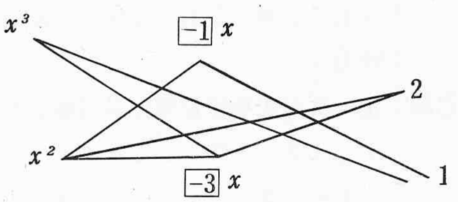
己」題

(1) 66年：在有理數多項式的集合$Q[x]$中，$x^5-3x^4+5x^2-7x+2$
(A)為一質多項式 (B)有一次因式 (C)有二次因式 (D)有三次因式 (E)有四次因式

解：1. 由一次因式檢驗定理知可能之有理根為±1，±2，但由視察及綜合除法知±1，±2皆不為其根故無一次及四次因式

2. 由法拉第十字交乘法因式分解知

$$x^5-3x^4+5x^2-7x+2$$
$$=(x^2-3x+1)(x^3-x+2)$$



3. 故選(C)(D)

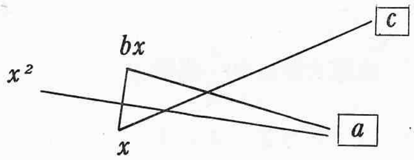
分析與整理：1. 一次因式檢驗定理：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$

若$(ax-b)\ f(x)$

⇒① $a\mid a_n$，$b\mid a_0$

② $(a-b)\mid f(1)$，$(a+b)\mid f(-1)$

2. 法拉第之十字交乘法因式分解

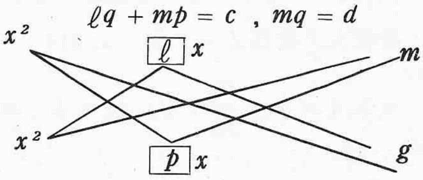


(1) x^3+px^2+qx+r
$=(x+a)(x^2+bx+c)$
$=x^3+(a+b)x^2+(ab+c)x+ac$

其中 $a+b=p$，$ab+c=q$，$ac=r$

(2) $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$
$=(x^2+\ell x+m)(x^2+px+q)$
$=x^4+(\ell+p)x^3+(mq+\ell p)x^2+(\ell q+mp)x+mq$

其中 $\ell+p=a$，$mq+\ell p=b$，$\ell q+mp=c$，$mq=d$



(2) 69年「庚」：

(i) 設n為一整數，而$3x^2+7nx+9$在$Q[x]$中不是質式，則 (A)n必為正數 (B)n必為偶數 (C)n必為奇數 (D)n必為3之倍數 (E)$|n|\le 0$

(ii) 接上題，設$n\in Z$，$\alpha\in R$，若方程式

$$x^3+\frac{7n}{2}x^2+9x+2=0$$

有有理重根，則 (A)α必為有理數 (B)α必為整數 (C)α必與n同號 (D)α有二個解 (E)α有四個解

解：1. ∵ $3x^2+7nx+9$，$n\in Z$在$Q[x]$中不是質式

2. ∴ $3x^2+7nx+9=0$必有有理根，由一次因式檢驗定理知其有理根必在

±1，±3，±9，$\pm\frac{1}{3}$之中

3. 當$x=\pm1$時，代入$3x^2+7nx+9=0$中得$n=\pm\frac{12}{7}$（不合），當$x=\pm3$時代入解得 $n=\pm\frac{12}{7}\notin Z$

4. 當$x=\pm\frac{1}{3}$時代入解得$n=\pm4\in Z$，當$x=\pm9$時代入解得$n=\pm4\in Z$，故$n=\pm4$，而選(B)(E)

5. 令 $f(x)=x^3+\frac{7n}{2}x^2+9x+\alpha$，
$f'(x)=3x^2+7nx+9$，
由題意和$f(x)=0$與$f'(x)=0$有公根（有理根）

6. 而由(i)知$n\in Z$時$f'(x)=0$之有理根為$\pm\frac{1}{3}$，±9，故$f(x)=0$與$f'(x)=0$之有理公根為$\pm\frac{1}{3}$，±9

7 ∴ $f(9)=0$，$(n=-4)$代入得
$\alpha=324$，$f(-9)=0\ (n=4)$
代入得$\alpha=-324$　$f(\frac{1}{3})=0$
$(n=-4)$代入得

$\alpha=-\dfrac{40}{27}$，$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$

（$n=4$）代入得 $\alpha=\dfrac{40}{27}$

8. ∴ α 必爲有理數且不一定與 n 同號，α 有四個解，故選(A)(E)

分析與整理：

1. 一次因式檢驗定理
2. 若 $f(x)=0=f'(x)\Rightarrow f(x)=0$ 有二重根

【己】假設 $f(x)=6x^4-29x^3+26x^2+14x-12$，我們要解方程式 $f(x)=0$，先試求有理根：已知 $f(x)=0$ 在開區間 $\left(-1,\dfrac{-1}{3}\right)$ 內有一個有理根 $-\dfrac{q}{p}$（既約分數），p，$q\in A$，則

17. (A) $p\in\{1,3,5,7,9\}$
 (B) $p\in\{2,3,6,7\}$
 (C) $p\in\{4,5,6,7\}$
 (D) $p\in\{8,9\}$

18. (A) $q\in\{1,3,5,7,9\}$
 (B) $q\in\{2,3,6,7\}$
 (C) $q\in\{4,5,6,7\}$
 (D) $q\in\{8,9\}$

（以上二小題，全對得5分，答錯倒扣 5／17分）

（接上題）已知 $f(x)$ 在開區間（1，2）內有一有理根 $\dfrac{s}{r}$（既約分數），其中 r，$s\in A$，則

19. (A) $r\in\{1,3,5,7,9\}$
 (B) $r\in\{2,3,6,7\}$
 (C) $r\in\{4,5,6,7\}$
 (D) $r\in\{8,9\}$

20. (A) $s\in\{1,3,5,7,9\}$
 (B) $s\in\{2,3,6,7\}$
 (C) $s\in\{4,5,6,7\}$
 (D) $s\in\{8,9\}$

（以上二小題，全對得5分，答錯倒扣5／12分）

$f(x)=0$ 另兩個根，其較大者爲 $\ell+\dfrac{m}{10}$（取兩位有效數字），$\ell\in A$，$m\in A$，則

21. (A) $|\ell|\in\{1,3,5,7,9\}$
 (B) $|\ell|\in\{2,3,6,7\}$
 (C) $|\ell|\in\{4,5,6,7\}$
 (D) $|\ell|\in\{8,9\}$
 (E) $\ell\leq 0$

22. (A) $m\in\{1,3,5,7,9\}$
 (B) $m\in\{2,3,6,7\}$
 (C) $m\in\{4,5,6,7\}$
 (D) $m\in\{8,9\}$
 (E) $m\in\{0\}$

（以上二小題，全對得6分，答錯倒扣6／189分）

己解：由一次因式檢驗定理知其可能之有理根爲 ±1，±2，±3，±4，±6，±12，$\pm\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{3}{2}$，$\pm\dfrac{1}{3}$，$\pm\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{1}{6}$

(1) 介於 $\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ 之有理根可能爲 $-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{2}{3}$，由綜合除法知 $-\dfrac{2}{3}$ 爲所求

∴ $p=3$，$q=2$

(2) 介於（1，2）之有理根可能爲 $\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，由綜合除法知 $\dfrac{3}{2}$ 爲所求

∴ $r=2$，$s=3$

(3)
$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 6-29+26+14-12 & \\
 & \quad -4+22-32+12 & -\dfrac{2}{3} \\
\hline
3 & 6-33+48-18\ ,\ 0 & \\
 & 2-11+16-\ 6 & \dfrac{3}{2} \\
 & \quad +3-12+\ 6 & \\
\hline
2 & 2-\ 8+\ 4\ ,\ 0 & \\
 & 1-\ 4+\ 2 &
\end{array}
$$

∴ $f(x)=(3x+2)(2x-3)(x^2-4x+2)=0$

∴ $x^2-4x+2=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

故較大之根爲 $2+\sqrt{2}=3.414=3.4=3+\dfrac{4}{10}$ ∴ $\ell=3$，$m=4$

故　17選(A)(B)，18選(B)，19選(B)，20選(A)(B)，21選(A)(B)，22選(C)

(七) 從68年乙丁組之考題「甲」，「乙」及63年考題（17）與59年考題（19）可推出70年「庚」

(1) 68乙丁「甲」橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的兩點（$a\cos\alpha$, $b\sin\alpha$）與（$a\cos\beta$, $b\sin\beta$）之連線，斜率爲何？

(A) $m=\frac{b}{a}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$　(B) $m=-\frac{b}{a}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

(C) $m=\frac{b}{a}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$　(D) $m=\frac{-b}{a}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$

(E)以上皆非

解：1. 斜率$m=\frac{b\sin\beta-b\sin\alpha}{a\cos\beta-a\cos\alpha}$

$$=\frac{b\left(2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{a\left(-2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}$$

$=-\frac{b}{a}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$　故選(D)

分析與整理：

1. 橢圓$\frac{b^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之參數式爲

$x=a\cos\theta=a\frac{1-t^2}{1+t^2}$　$(\theta\in R)$

$y=b\sin\theta=b\frac{2t}{1+t^2}$　$(t\in R)$

2. 圓$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$之參數式爲

$x=h+r\cos\theta=h+r\frac{1-t^2}{1+t^2}$　$(\theta\in R)$

$y=h+r\sin\theta=k+r\frac{2t}{1+t^2}$　$(t\in R)$

3. 雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$之參數式爲$\begin{cases}x=a\sec\theta\\ y=b\tan\theta\end{cases}$

$\theta\in\{\ |\ \theta\neq n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in Z\ \}$

4 拋物線$y^2=4cx$之參數式爲

$x=ct^2$，　$y=2ct$　　$(t\in R)$

5. 和差化積公式:

(1) $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

(2) $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

(3) $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

(4) $\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

6. 積化和差公式：

(1) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

(2) $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

(3) $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

(4) $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

大專聯考一考和差化積常出在(4)最容易出錯之處應加注意。

(2) 68年乙丁「乙」試解三角方程式$\cos 2x+\cos^4x+\cos 6x=3$在$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$之範圍內設有$N$個解，則　(A)$N=0$　(B)$N=1$　(C)$N=2$　(D)$N=3$　(E)$N=6$

解：1. $\cos 2x+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+\cos 3(2x)=3$

$\cos 2x+\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}+4\cos^3 2x-3\cos 2x=3$

2. $16\cos^3 2x+\cos^2 2x-6\cos 2x-11=0$

令　$\cos 2x=t$，

則　$16t^3+t^2-6t-11=0$

$$\begin{array}{rrrr|l}16 & +1 & -6 & -11 & 1\\ & +16 & +17 & +11 & \\ \hline 16 & +17 & +11 & ,0 & \end{array}$$

∴ $(t-1)(16t^2+17t+11)=0$

∴ $t=1$，

$16t^2+17t+11=0$（不合）

3. ∴ $\cos 2t=1$　∴ $2x=2n\pi$

∴ $x=n\pi$

但$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$　∴ $x=0$，π

故 $N=2$，而選(C)

分析與整理：

1. $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = \left|\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right|$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$1 \pm \sin x = (\cos\dfrac{x}{2} \pm \sin\dfrac{x}{2})^2$

2. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
$= 1-2\sin^2\theta$

3. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$，

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

4. 三角方程式之通解：

(1) $\sin X = a$，$|a| \le 1 \Rightarrow$
$x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1} a$

(2) $\csc x = a$，$|a| \ge 1 \Rightarrow$ $(n \in Z)$
$x = n\pi + (-1)^n \csc^{-1} a$

(3) $\cos x = a$，$|a| \le 1 \Rightarrow$
$x = 2n\pi \pm \cos^{-1} a$

(4) $\sec x = a$，$|a| \ge 1 \Rightarrow$
$x = 2n\pi \pm \sec^{-1} a$

(5) $\tan x = a$，$a \in R \Rightarrow$
$x = n\pi + \tan^{-1} a$

(6) $\cot x = a$，$a \in R \Rightarrow$
$x = n\pi + \cot^{-1} a$

5. 特殊解：

(1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$ $(n \in Z)$

(2) $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2n\pi + \dfrac{3\pi}{2} = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2}$

(4) $\cos x = 0 \Rightarrow x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

(5) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2n\pi$ $(n \in Z)$

(6) $\cos x = -1 \Rightarrow x = 2n\pi + \pi$

(3) 59年(19)：設A爲不等式 $(x-\dfrac{\pi}{2})^2 + (y-\dfrac{\pi}{2})^2 \le \pi^2$ 之解集合，B爲方程式 $\sin x + \sin y = 0$ 之解集合，其交集$A \cap B$ 之圖形爲何？

解：1. $\sin x + \sin y = 0 \Rightarrow 2\sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2} = 0$ ∴ $\sin\dfrac{x+y}{2} = 0$

∴ $\dfrac{x+y}{2} = n\pi \Rightarrow x+y = 2n\pi$

$\cos\dfrac{x-y}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x-y}{2} = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x-y = 2n\pi + \pi$

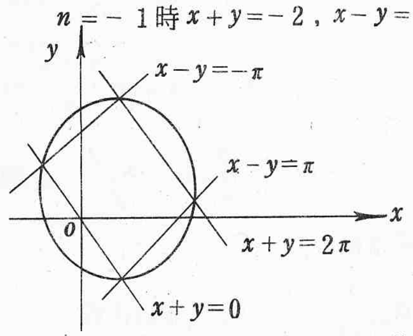
2. A：$(x-\dfrac{\pi}{2})^2 + (y-\dfrac{\pi}{2})^2 \le \pi^2$

表以 $(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ 爲圓心，π 爲半徑之圓

3. ∴ $n=0$時 $x+y=0$，$x-y=\pi$

$n=1$時 $x+y=2\pi$，$x-y=3\pi$

$n=-1$時 $x+y=-2$，$x-y=-\pi$



4. 由作圖知$A \cap B$是正方形，n爲其他值時與A之交集均爲ϕ

(4) 63年(17)(i)很小很小的圓心角所對的圓弧長和弦長之比幾幾乎就是1，試根據這個道理計算出 $\sin 10''$ 及 $1-\cos 10''$，書 $\sin 10'' = a \cdot 10^{-m}$ 及 $1-\cos 10'' = b \cdot 10^{-n}$ 此地 $1 \le a < 10$，$1 \le b < 10$ 而 m，$n \in N$，再將 a，b 四捨五入得整數 a' 及 b' 此時 $1 \le a' \le 10$，$1 \le b' \le 10$，故下列近似式 $\sin 10'' = a' \cdot 10^{-m}$，$1-\cos 10'' = b' \times 10^{-n}$ 精確到有效數字一位，判定下列敍述何者爲真？ (A) $m \le 4$ (B) m是偶數 (C) a'是偶數 (D) $a' \le 5$ (E) $a' \in \{2, 5, 8\}$

(ii) 判定下列敍述何者爲真？ (A) $n \le 8$ (B) n 是奇數 (C) b' 是奇數 (D) $b' \le 5$ (E) $b' \in \{3, 5, 6, 8\}$

解：1. $\theta \to 0$，$\sin\theta \approx \theta$

$\therefore\quad 10'' = \dfrac{10\pi}{180\times 60\times 60}$

2. $\therefore\quad \sin 10'' = \dfrac{10\pi}{180\times 60\times 60}$

$= \dfrac{10\times 3.14}{648000} = 0.000048$

$= 4.8\times 10^{-5} = 5\times 10^{-5}$

$\therefore\quad m = 5$, $a = 4.8$, $a' = 5$

故　選(D)(E)

3. $1-\cos 10'' = 2\sin^2 5''$

$= 2\left(\dfrac{5\pi}{648000}\right)^2 = 1.17\times 10^{-9}$

$= 1.2\times 10^{-9}$

$\therefore\quad n = 9$, $b = 1.2$, $b' = 1$

故　選(B)(C)(D)

分析與整理：

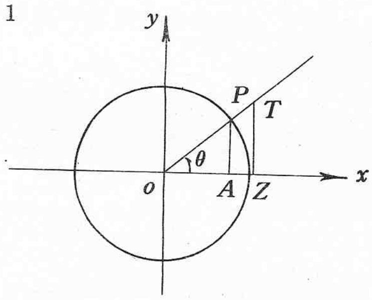
1. $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$, π 弳 $= 180^\circ$

$\therefore$　1 弳 $= \dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ = \dfrac{\pi\text{弳}}{180}$

2. 本題利用極限之夾擊原理可證明

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$（即 $\theta\to 0$, $\sin\theta\approx\theta$）

證明 1



由三角函數之幾何意義知 $a\,\triangle OPA < a$ 扇形

$OPZ < a\,\triangle OZT\ \dfrac{1}{2}PA < \dfrac{1}{2}OA\cdot PA$

$< \dfrac{1}{2}1^2\cdot\theta < \dfrac{1}{2}OZ\cdot ZT\sin\theta$

$< \cos\theta\,\sin\theta < \theta < \tan\theta$

$\therefore\quad 1 < \dfrac{\theta}{\sin\theta} < \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1$

$\because\quad \lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$, $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1$,

由夾擊原理知 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

3. 夾擊原理：

(1) 數列 $<a_n>$, $<b_n>$, $<c_n>$ 滿足 $a_n \le c_n \le b_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$

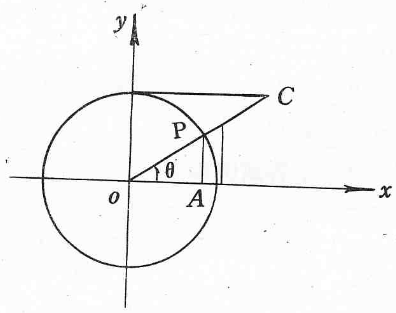
4. $1-\cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$1+\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$1\pm\sin\theta = \left(\cos\dfrac{\theta}{2}\pm\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2$

5. 科學記號為將 n 表成 a_0 , a_1 , $a_2\cdots\cdots\times 10^m$ 其中 a_0 , a_1 , $a_2\cdots\cdots\in A = \{0, 1, 2, \cdots\cdots 9\}$, $m\in Z$ 。如 $n = 4567 = 4.567\times 10^3$, $n = 0.004567 = 4.567\times 10^{-3}$

6. 三角函數之幾何意義



$\sin\theta = PA$, $\cot\theta = BC$

$\cos\theta = OA$, $\sec\theta = OT$

$\tan\theta = ZT$, $\csc\theta = OC$

利用畢氏定理知 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

做完上面這幾個考古題相信就可順利地拿到70年「庚」之分數了。

【庚】

23. 試選出正確的式子

(A) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(B) $\sin x = \sin(\pi + x)$

(C) $\sin^2 x = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$

(D) $\sin^2 x=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(E) $\sin^2 x=\sin^2(\pi+x)$

（複選，3分，答錯倒扣3／30分）

在平面R^2上取定了一個直角坐標系，令$S=\{(x,y):\sin^2 x+\sin^2 y=1\}$爲$\sin^2 x+\sin^2 y=1$之圖形，集合$R^2-S$被$S$分隔成一塊塊，每一塊叫做一個"細胞"，細胞之形狀爲何？面積多少？

24. 每個細胞的形狀是 (A)圓 (B)正六角形 (C)正五角形 (D)正四角形 (E)正三角形

（單選，3分，答錯倒扣3／4分）

25. 每個細胞的面積之近似值爲$f\in A$（取一位有效數字），則

(A) $f\in\{1,3,5,7,9\}$

(B) $f\in\{2,3,6,7\}$

(C) $f\in\{4,5,6,7\}$

(D) $f\in\{8,9\}$

（複選，3分，答錯倒扣3／8分）

有多少個細胞含在圓盤$\{(x,y):x^2+y^2\leq r^2\}$中呢？答案記做$N(r)$；

26. 先求$N(1)=$？

(A) $N(1)=0$ (B) $N(1)=1$ (C) $N(1)=2$

(D) $N(1)=3$ (E) $N(1)=4$

（單選，2分，答錯倒扣2／4分）

27. 再求$N(2)=$？

(A) $N(2)=0$ (B) $N(2)=1$ (C) $N(2)=2$

(D) $N(2)=3$ (E) $N(2)=4$

（單選，2分，答錯倒扣2／4分）

28. 再求$N(5)=$？ $N(5)\in A$

(A) $N(5)\in\{1,3,5,7,9\}$

(B) $N(5)\in\{2,3,6,7\}$

(C) $N(5)\in\{4,5,6,7\}$

(D) $N(5)\in\{8,9\}$

（複選，2分，答錯倒扣2／8分）

再求$N(8)=$？ $N(8)=p\cdot 10+q$，$p,q\in A$，則

29. (A) $p\in\{1,3,5,7,9\}$

(B) $p\in\{2,3,6,7\}$

(C) $p\in\{4,5,6,7\}$

(D) $p\in\{8,9\}$

(E) $p\in\{0\}$

30. (A) $q\in\{1,3,5,7,9\}$

(B) $q\in\{2,3,6,7\}$

(C) $q\in\{4,5,6,7\}$

(D) $q\in\{8,9\}$

(E) $q\in\{0\}$

（以上二小題，全對得3分，答錯倒扣3／99分）

如果半徑r越來越大，那麼$\frac{N(r)}{r^\alpha}$會趨近一個實數$\beta>0$，試求α及β，則

31. (A) $\alpha=0$ (B) $\alpha=2^{-1}$ (C) $\alpha=1$ (D) $\alpha=2$ (E) $\alpha=3$

（單選，3分，答錯倒扣3／4分）

32. (A) $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\beta=\frac{2\pi}{9}$ (C) $\beta=\frac{2}{3}$

(D) $\beta=\frac{2}{\pi}$ (E) $\beta=\frac{\pi}{5}$

（單選，3分，答錯倒扣3／4分）

庚解：(1)由公式知$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，

$\sin(\pi+x)=-\sin x$，

$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]^2$

$=\cos^2 x$，

$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)\right]^2$

$=\frac{1}{2}(1+2\sin x\cos x)\neq\sin^2 x$，

$\sin^2(\pi+x)=[\sin(\pi+x)]^2$

$=\sin^2 x$ 故 23.選(A)(E)

(2)由$\sin^2 x+\sin^2 y=1$得

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 2y}{2}=1$$

$\therefore\ \cos 2x+\cos 2y=0$

$\Rightarrow\cos(x+y)\cos(x-y)=0$

(i)由$\cos(x+y)=0$得

$$x+y=n\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n\in Z)$$

(ii) 由 $\cos(x-y)=0$ 得

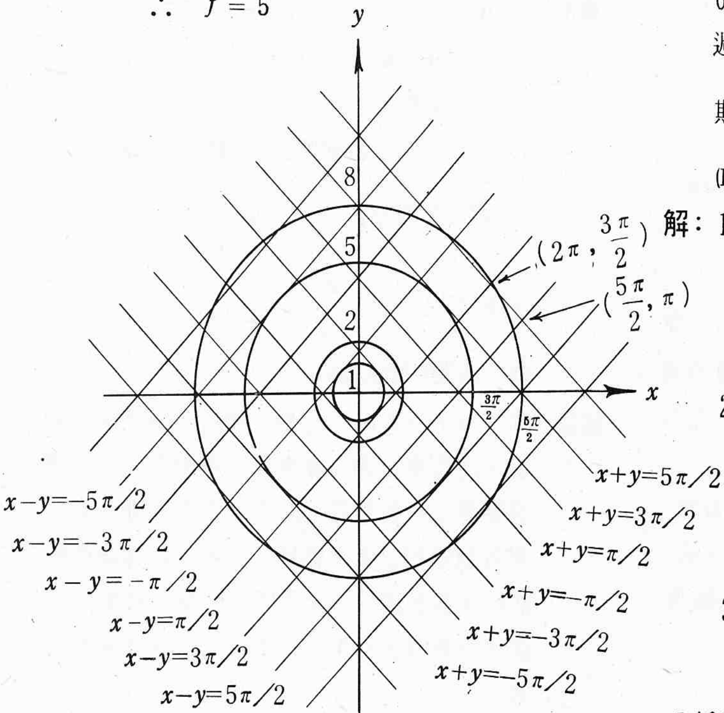
$$x-y=m\pi+\frac{\pi}{2} \quad (m\in Z)$$

由(i)(ii)正確作圖如

(3)由圖知每個細胞之形狀爲正四角形

(4)每個細胞的面積 $=\frac{\pi^2}{2}=4.9298 \doteq 5$

$\therefore f=5$



(5)因最接近原點(即圓盤中心)的正四角形之頂點距原點 $\frac{\pi}{2}>1$，$\therefore N(1)=0$

(6) $\frac{\pi}{2}<2<\frac{3\pi}{2}$ $\quad\therefore N(2)=1$

(7) $\frac{3\pi}{2}<5<\frac{5\pi}{2}$ $\quad\therefore N(5)=9$

(8) $\frac{5\pi}{2}<8<\frac{7\pi}{2}$ $\quad\therefore N(8)=29$

(9)因 $\dfrac{\pi(r-t)^2}{\frac{\pi^2}{2}}\leq N(r)\leq\dfrac{\pi r^2}{\frac{\pi^2}{2}}\ (t\geq\pi)$

$$\therefore \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(r-t)^2}{r^2}\leq\frac{N(r)}{r^2}\leq\frac{2}{\pi}$$

而 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(r-t)^2}{r^2}=\frac{2}{\pi}$，

由夾擊定理知

$$\therefore \lim_{r\to\infty}\frac{N(r)}{r^2}=\frac{2}{\pi} \quad \alpha=2,\ \beta=\frac{2}{\pi}$$

故 24選(D)，25.選(A)(C)，26.選(A)，27.選(B) 28.選(A)(D)，29.選(B)，30.選(A)(D)，31選(D)，32.選(D)

(5) 60.夜 66.年：試判定下列何者爲眞？ (A)正弦函數爲週期函數 (B)正切函數爲週期函數，π 爲其週期 (C) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 則 $\tan\theta>\sin\theta$ (D) $\sin\theta$ 爲奇函數 (E) $\cos\theta$ 是偶函數

解：1. $\sin(2\pi+x)=\sin x$

$\therefore$ 2π 爲 $\sin x$ 之週期，

$\tan(\pi+x)=\tan x$，

$\therefore$ π 爲 $\tan x$ 之週期

2. $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\therefore$ $\sin\theta$ 爲奇函數

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\therefore$ $\cos\theta$ 爲偶函數

3 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 則 $\tan\theta>\sin\theta$ 恒眞

故 選(A)(B)(C)(D)(E)

分析與整理：

1. 週期函數：設 $f: R\to R$，$p>0$，且爲最小正數若 $\forall n\in N$ 恒有 $f(np+x)=f[(n-1)p+x]=f(p+x)=f(x)$ 則稱 f 爲週期函數，p 爲 f 之週期
2. 若 p 爲 $f(x)$ 所定函數之週期，則 $f(kx)$ 所定函數亦爲週期函數，其週期爲 $\frac{p}{k}$ $(k>0)$
3 三角函數之週期

(1) $\sin nx$, $\cos nx$, $\csc nx$ 之週期爲 $\frac{2\pi}{n}$，

$\tan nx$, $\cot nx$ 之週期爲 $\frac{\pi}{n}$

(2) $|\sin nx|$，$|\cos nx|$，$|\tan nx|$，$|\cot nx|$，$|\sec nx|$，$|\csc nx|$ 之週期爲 $\frac{\pi}{n}$

(3) $n\in N$，$\sin^n x$，$\text{con}^n x$，$\sec^n x$，

$\csc^n x$，如 n 爲偶數時週期爲 π，n 爲奇數時週期爲 2π 但不論奇數或偶數，$\tan^n x$，$\cot^n x$ 之週期皆爲 π。

(4) $|\tan x|+|\cot x|$，$|\sec x|+|\csc x|$，$|\sin x|+|\cos x|$ 之週期爲 $\frac{\pi}{2}$，$|\tan nx|+|\cot nx|$，$|\sec nx|+|\csc nx|$，$|\sin nx|+|\cos nx|$ 之週期爲 $\frac{\pi}{2n}$。

(5) n 爲偶數時，$\sin^n kx+\cos^n kx$，$\tan^n kx+\cot^n kx$，$\sec^n kx+\csc^n kx$ 之週期爲 $\frac{\pi}{2k}$。

(6) 數個週期函數 $f(x)$，$g(x)$ 之和、差、積、商仍爲一週期函數，欲求和、差、積、商的週期可從諸週期的最小公倍數著手檢驗（但不一定爲最小公倍數，有時折半）。

4 若 $f(-\theta)=-f(\theta)$ 則稱 $f(\theta)$ 爲奇函數，如 $\sin\theta$，$\csc\theta$，$\tan\theta$，$\cot\theta$ 皆是。若 $f(-\theta)=f(\theta)$，則稱 $f(\theta)$ 爲偶函數，如 $\cos\theta$，$\sec\theta$ 皆是。

【庚】

20. 試選出正確的敍述

(A) $\sin x$ 是 x 的奇函數

(B) $\sin x$ 是 x 的週期函數，週期爲 2π

(C) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

(D) $\cos^2 x$ 的週期爲 π

(E) $\sin^2 x$ 的週期爲 $\frac{\pi}{2}$

（複選，4分，答錯倒扣4／30分）

庚解：$\sin(-x)=-\sin x$

$\therefore$ $\sin x$ 是 x 之奇函數

$\sin(2\pi+x)=\sin x$

$\therefore$ $\sin x$ 是週期函數且週期爲 2π

$\cos^2 x$ 之週期爲 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\sin^2 x$ 之週期爲 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

故 20.選(A)(B)(C)(D)

結語：作了以上之整理和分析，相信同學們定可相信「追踪拿分術」是準備大專聯考之一種複習捷徑，只要您將不同之題型100題左右之考古題做如上述之整理，定可很輕鬆地準備數學和拿最高分。希望同學能細心和耐性的處理所學過之資料，在學習上定可獲事半功倍之功效。

—本文作者現任教於嘉義高中