上期演練試題解答

週期函數與其應用解答

羅　添　壽

1. ***B***

解：$f(\frac{59}{3})=f(\frac{29}{3}+10)=f(\frac{29}{3})$

$=f(-\frac{1}{3}+10)=f(-\frac{1}{3})$

$=-f(\frac{1}{3})=1$

2. ***C***

解：$\because\ f(1978)=f(1+3\times659)=f(1)$，

又　$f(-2+3)=f(-2)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(1978)=f(1)=\frac{1}{2}$

3. ***A，C***

解：$\because a_1=f(a_0)=f(x)=\frac{1}{1-x}$

又 $a_2=f(a_1)=f(\frac{x}{1-x})$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$

$a_3=f(a_2)=f(\frac{x-1}{x})$

$=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x=a_0$

故爲週期函數且週期爲 3 。

4. ***B***

解：$\because a_{1978}=a_{3\times659+1}=a_1=\frac{1}{1-x}$

5. ***A，B，C，D，E***

解：依題意知 $f(1)=7$，$f(2)=9$，$f(3)=3$，$f(4)=1$，$f(5)=7$，$f(6)=9$，$f(7)=3$，$f(8)=1$，…………

知 f 爲週期函數且週期爲 4 ，

$f(N)=\{1,3,7,9\}$

又 $f(10)=f(2\times4+2)=f(2)=9$，

$f(1978)=f(4\times494+2)=f(2)=9$

6. ***A，C，D***

解：(1) $3^7=3^4\cdot3^3=81\times27$

$\Rightarrow 3^7$ 之個位數爲 7 ，$\therefore A_1=7$

(2) a_1^7 之個位數與 7^7 的個位數相同，而

$7^7=7^4\cdot7^3=2401\times343$

$\therefore A_2=3$

(3)同理 $A_3=7$，$A_4=3$，……

故 $A_{2m}=3$，$A_{2m-1}=7$

$\therefore$ 其週期爲 2

7. ***D***

解：令 $u=x+1$，$v=1$

$\Rightarrow f(x+1)\cdot f(1)=f(x+2)+f(x)$

$\Rightarrow f(x+2)=f(x+1)-f(x)$ ……①

令 $u=x+1$，$v=1$　代入①

$\Rightarrow f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$ …②

由①，②知

$f(x+3)=-f(x)$ ……………③

由③知

$f((x+3)+3)=-f(x+3)$

$=-(-f(x))=f(x)$

$\Rightarrow f(x+6)=f(x)$

8. ***D***

解：

$g(x)=g(x+k)=f(\frac{x+k}{2})$

$=f(\frac{x}{2}+\frac{k}{2})$

② $f(x)=f(x+p)$

$\Rightarrow f(\frac{x}{2})=f(\frac{x}{2}+p)$

③ $\because g(x)=f(x/2)$，由①，②知

$f(\frac{x}{2}+\frac{k}{2})=f(\frac{x}{2}+p)\ \Rightarrow\ p=\frac{k}{2}$

9. A

解：① $g(x)=g(x+k)=f(x+k+a)$

② $g(x)=f(x+a)=f(x+p+a)$

由①，②知 $k=p$

10. A

解：① $g(x)=g(x+k)=f(p(x+k))$

$=f(px+pk)$

② $f(x)=f(x+p)$

$\Rightarrow f(px)=f(px+p)$

由①，②得

$f(px+pk)=f(px+p)$

$\Rightarrow pk=p \Rightarrow k=1$

（$\because p>0$，且 $k>0$，由說明得之）

11. A

解：① $g(x)=g(x+k)=f\left(a+\dfrac{p(x+k)}{n}\right)$

$=f\left(a+\dfrac{1}{n}(px+pk)\right)$

② $f(x)=f(x+p)$

$\Rightarrow f\left(a+\dfrac{px}{n}\right)=f\left(a+\dfrac{px}{n}+p\right)$

$\because \quad g(x)=f\left(a+\dfrac{px}{n}\right)$

由①，②知

$f\left(a+\dfrac{1}{n}(px+pk)\right)=f\left(a+\dfrac{px}{n}+p\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n}pk=p \Rightarrow k=n$

12. C

解：依題意知 $\forall x\in Z$，

$f(x+2)=\begin{cases} f(x)=0 & \text{當 } x \text{ 為偶數} \\ f(x)=1 & \text{當 } x \text{ 為奇數} \end{cases}$

$\therefore f(x+2)=f(x)$，$\forall x\in Z$

$\therefore p=2$，即週期為 2

13. B，D，E

解：(A) $2\pi/3$

(B) $2\pi/3^\circ=360^\circ/3^\circ=120$

(C) $\dfrac{\pi}{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{4}\pi$

(D) $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$

(E) $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{7+\pi}}=2\pi^2+14\pi$

14. C，D，E

解：(A) $2\pi/2=\pi$

（$\because f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|$

$=|-\sin x|=f(x)$，

但 $f(x+\pi/2)=|\sin(x+\pi/2)|$

$=|\cos x|\neq f(x)$ 之故）

(B) $\dfrac{\cos 3x \text{ 之週期}}{2}=\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

(C) $\left|\tan\left(\dfrac{x+\pi}{5}\right)\right|$ 之週期

$=\tan\dfrac{x+\pi}{5}$ 之週期 $=\tan\dfrac{x}{5}$ 之週期

$=\dfrac{\pi}{\frac{1}{5}}=5\pi$

(D) $4\left|\sec\dfrac{x+1}{3}\right|$ 之週期

$=\left|\sec\dfrac{x}{3}\right|$ 之週期 $=\dfrac{\sec\frac{x}{3} \text{ 之週期}}{2}$

$=\dfrac{2\pi\times 3}{2}=3\pi$

(E) 原式之週期 $=\left|\csc\dfrac{x}{5}\right|$ 之週期

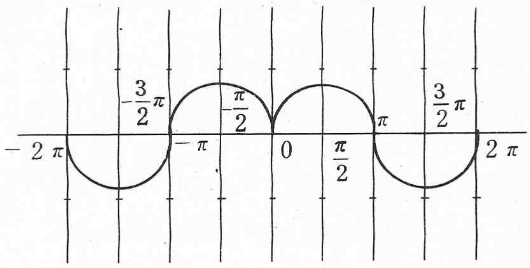
$=\dfrac{\csc\frac{x}{5} \text{ 之週期}}{2}=\dfrac{2\pi\times 5}{2}=5\pi$

15. A，C，E

解：(A) $\forall x\in R$，無週期。

但 $\begin{cases} x>0 \text{ 時週期 } 2\pi \\ x<0 \text{ 時週期 } 2\pi \end{cases}$

即 $\sin|x|=\begin{cases} \sin x & \text{當 } x\geq 0 \\ -\sin x & \text{當 } x<0 \end{cases}$



(B) π（注意 $\cos(-x)=\cos x$）

(C) $\forall x\in\{x \mid x\neq nx+\frac{\pi}{2}, n\in Z\}$

無週期，但

$$\begin{cases} x\geq 0 \Rightarrow \text{週期 } \frac{\pi}{3} \\ x<0 \Rightarrow \text{週期 } \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(D) $\because \sec\left|\frac{x}{3}-30^\circ\right| = \sec\left(\frac{x}{3}-30^\circ\right)$

$\therefore$ 其週期爲 6π

(E) 2

16. ***A*，*B*，*C*，*D***

解：(A) $\because (\cos(x+\pi))^2=(-\cos x)^2 = \cos^2 x$

故其週期$=\dfrac{\cos x\text{ 之週期}}{2}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(B) $\because (\tan(x+\frac{\pi}{2}))^3=-\cot^3 x\neq\tan^3 x$

又 $\tan^3(x+\pi)=\tan^3 x$，故週期爲 π

(C) $\because \cot^{15}(x+\frac{1}{\pi})$ 之週期

$=\cot(x+\frac{1}{\pi})$ 之週期 $=\pi$

(D) $\sec^{16}|x|$ 之週期 $=\sec^{16}x$ 之週期

$=\dfrac{\sec x\text{ 之週期}}{2}\quad\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(E) $\csc^{17}(x+10^\circ)$ 之週期 $=$

$=\csc(x+10^\circ)$ 之週期 $=2\pi$

17. ***A*，*C***

解：$2\sin 2x+3\cos 3x+4$ 之週期

$=2\sin 2x+3\cos 3x$

$=[180^\circ, 120^\circ]=360^\circ=2\pi$

(B) $[45^\circ, 30^\circ]=90^\circ=\frac{\pi}{2}$

(C) $[2\pi, \pi]=2\pi$

(D) $[\pi, \pi]=\pi$

(E) $\because \cos x$ 之週期爲 2π，

$\sin\sqrt{2}x$ 之週期爲 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}$，

又 $\dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\in R-Q$　$\therefore$ 非週期函數

18. ***B*，*C*，*D*，*E***

解：(A) $f(x+\frac{\pi}{2})=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|+|\cos(x+\frac{\pi}{2})|$

$=|-\cos x|+|-\sin x|$

$=|\sin x|+|\cos x|=f(x)$

故週期爲 $\frac{\pi}{2}$

(B) π

(C) $\dfrac{\pi+100}{|\sin(x+3^\circ)|}$ 之週期

$=|\sin(x+3^\circ)|$ 之週期 $=\pi$

(D) $\because f(x)=\dfrac{2}{\cos x}=2\sec x$

故週期爲 2π

(E) $|\sin x|-|\cos x|$ 並非對稱形

故取 $[\pi, \pi]=\pi$

19. ***D***

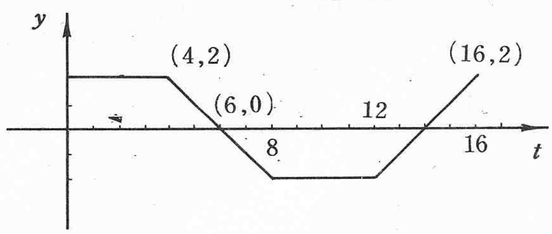
解：(1) $0\leq t\leq 4 \Rightarrow y=2$

(2) $4\leq t\leq 8 \Rightarrow y=6-t$

(3) $8\leq t\leq 12 \Rightarrow y=-2$

(4) $12\leq t\leq 16 \Rightarrow y=t-14$

……………… 週期爲 16



20. ***B***

解：$\because x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

令ω爲1之立方虛根，則

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\quad,\quad \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\therefore x=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=-\omega^2$$

或$x=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}=-\omega$

當$x=-\omega$時

原式$=(-\omega)^{1978}+\dfrac{1}{(-\omega)^{1978}}$

$$=\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

同理$x=-\omega^2$時原式亦爲-1。

21. ***B***

解：

$$\because M^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

故M爲週期函數，其週期爲2

$$\text{又}M^{1978}=(M^2)^{989}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{989}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

22. ***A*，*E***

解：$\because A^2=\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$$A^3=\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i&0\\0&-i\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}-i&0\\0&-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

∴週期爲4

又$A^{1978}=(A^4)^{494}\cdot A^2=A^2$

23. ***A*，*C*，*D***

解：

$$\text{令}A(1)=\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{3}&\sin\frac{2\pi}{3}\\-\sin\frac{2\pi}{3}&\cos\frac{2\pi}{3}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(2)=\begin{bmatrix}\cos\frac{4\pi}{3}&\sin\frac{4\pi}{3}\\-\sin\frac{4\pi}{3}&\cos\frac{4\pi}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=(A(1))^2$$

$$A(3)=\begin{bmatrix}\cos 2\pi&\sin 2\pi\\-\sin 2\pi&\cos 2\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

又$A(4)=A(1)$，$A(5)=A(2)$，$A(6)=A(3)$

$\therefore A(1978)=A(3\times 659+1)=A(1)$

——本文作者現任教於台南新化高中