論述類

簡易線性代數(四)

線性變換

賴漢卿

一個矩陣將一有限維綫性空間映到另一有限維空間，這是一個綫性變換，反之任何綫性變換在有限維空間中都可用矩陣表示出來。這種綫性變換在綫性代數中扮演着很重要的角色。如坐標變換，以及將在下一次談的固有值問題等。

§4・1　矩陣與線性變換

設X、Y為兩個向量空間，映射（也稱變換或函數）$f: X\to Y$
如果滿足下面條件：

$$(4\cdot1)\quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}) && \mathbf{x},\mathbf{y}\leftarrow X \\ f(\lambda\mathbf{x}) &= \lambda f(\mathbf{x}) && \lambda\text{為純量（數）}\end{aligned}$$

則稱f為由X到Y的**線性變換**。

如$X=Y=\mathbf{R}$時，即f為一般之實變數的實數值函數，譬如

$$f(x)=2x,\qquad x\in\mathbf{R}$$

則
$$f(a)=2a,\qquad f(b)=2b,$$
$$f(a+b)=2(a+b)=2a+2b=f(a)+f(b)$$
$$f(\lambda a)=2(\lambda a)=\lambda f(a)$$

所以f是一種綫性函數。如果$g(x)=x+3$或$h(x)=x^2$ 我們很容易看出g、h都不是綫性（$g(x)=x+3$表示直綫，雖不稱為綫性，但一般稱之為**仿射**，也就是類似於綫性的意思）。

一個$m\times n$矩陣A顯然可做為$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$之一種綫性變換，蓋因$A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A\mathbf{x}+Ay$，$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$，且對任意數$\lambda$，$A(\lambda\mathbf{x})=\lambda A\mathbf{x}$，反之由$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$之任何綫性變換$f$，都可用一個$m\times n$矩陣表示出來，嚴格地說，可寫成下列定理。

定理4・1　任何$m\times n$ 矩陣A所決定的映射

$$f: x\in\mathbf{R}^n\longrightarrow A\mathbf{x}\in R^m$$

為綫性，反之由n維向量$\mathbf{R}^n$到m維空間$\mathbf{R}^m$的綫性變換f，可用一個$m\times n$矩陣A表成$f(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$，此$A$是唯一確定的。

證明. 當A為$m\times n$矩陣時，顯然$f(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$是綫性。反之設$f:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^m$為一綫性映射，令

$$f(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}),\cdots,f_m(\mathbf{x})),\qquad x\in\mathbf{R}^n$$

則 $f_1, f_2,\cdots,f_m$為$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$的綫性函數，因任意$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$可以寫成

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=(x_1,0,0,\cdots,0)+(0,x_2,0,\cdots,0)+\cdots+(0,\cdots0,x_n)\\ &=x_1(1,0,0\cdots,0)+x_2(0,1,0,\cdots,0)+\cdots+x_n(0,\cdots0,1)\\ &=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\end{aligned}$$

所以

$$(1)\ f(\mathbf{x})=x_1f(\mathbf{e}_1)+x_2f(\mathbf{e}_2)+\cdots+x_nf(\mathbf{e}_n)$$

但
$$f(\mathbf{e}_1)=(f_1(\mathbf{e}_1),f_2(\mathbf{e}_1),\cdots,f_m(\mathbf{e}_1))$$
$$f(\mathbf{e}_2)=(f_1(\mathbf{e}_2),f_2(\mathbf{e}_2),\cdots,f_m(\mathbf{e}_2))$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$f(\mathbf{e}_n)=(f_1(\mathbf{e}_n),f_2(\mathbf{e}_n),\cdots,f_m(\mathbf{e}_n))$$

將它們寫成行向量並令$f_i(\mathbf{e}_j)=a_{ij}$，$i=1,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$

代入(1)便得

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=f_1(\mathbf{x})$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=f_2(\mathbf{x})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=f_m(\mathbf{x})$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，則得

$$A\mathbf{x}=f(x)$$

這樣就將定理證明了。

§ 4・2 平面上的線性變換

平面上之點$\mathbf{x}=(x_1,x_2)$是對於$\mathbf{e}_1=(1,0)$，$\mathbf{e}_2=(0,1)$的一種坐標表示。若A爲正則矩陣（即其行列式$|A|\neq 0$），則

$$\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{y}=A\mathbf{x} \qquad \mathbf{y}=(y_1,y_2)$$

是一種綫性變換，若

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

則
$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$$

此時若$|A|\neq 0$，我們可求得A^{-1}而得其坐標的逆表示式。

例如 坐標表示爲

$$y_1=3x_1+2x_2, \qquad y_2=7x_1+5x_2$$

則令 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$時，因$|A|=1\neq 0$，所以$A$爲正則。

於是求得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

故其逆變換的坐標表示就是：

$$x_1=5y_1-2y_2, \qquad x_2=-7y_1+3y_2$$

一般平面上之向量$\mathbf{x}$，以$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$爲一組基底向量時其坐標表示(x_1,x_2)就可以寫作

$$x=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2$$

今欲改換用$\mathbf{e}'_1$，$\mathbf{e}'_2$做爲新基底，則同一向量$\mathbf{x}$之新坐標表示爲

$$x = x_1' \mathbf{e}_1' + x_2' \mathbf{e}_2'$$

$\mathbf{e}_1'$，$\mathbf{e}_2'$ 對於原基底向量 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$的坐標表示設為

$$(4\cdot2)\begin{cases}\mathbf{e}_1' = \ell_{11}\mathbf{e}_1 + \ell_{12}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = \ell_{21}\mathbf{e}_1 + \ell_{22}\mathbf{e}_2\end{cases}\text{，即}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2\end{bmatrix}$$

令

$$L = \begin{bmatrix}\ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22}\end{bmatrix}$$

則L是將基底 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$變換成新基底 $\mathbf{e}_1'$，$\mathbf{e}_2'$的一種綫性變換，於是

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{x} &= x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2' \\ &= (\ell_{11}x_1' + \ell_{21}x_2')\mathbf{e}_1 + (\ell_{12}x_1' + \ell_{22}x_2')\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

上式兩邊　$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$之係數相等，故得新舊坐標間的關係如下：

$$(4\cdot3)\begin{cases}x_1 = \ell_{11}x_1' + \ell_{21}x_2' \\ x_2 = \ell_{12}x_1' + \ell_{22}x_2'\end{cases}$$

或

$$(4\cdot3)\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ell_{11} & \ell_{21} \\ \ell_{12} & \ell_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1' \\ x_2'\end{pmatrix}\text{，即 }\mathbf{x} = L^t\mathbf{x}'$$

此處

$$\begin{pmatrix}\ell_{11} & \ell_{21} \\ \ell_{12} & \ell_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22}\end{pmatrix}^t = L^t$$

L^t 表示矩陣L的轉置，即行與列之轉換。

因基底向量$\mathbf{e}_1'$，$\mathbf{e}_2'$（$\mathbf{e}_1$與$\mathbf{e}_2$也是一樣）不在同一（直綫）方向，所以行列式 $|L^t| \neq 0$，但由第二章的結果知行列式之行與列轉換後之值不變，所以

$$|L^t| = |L| \neq 0$$

故當新基底向量以（4・2）表出時，舊坐標（x_1，x_2）依（4・3）的結果，可用新坐標（x_1'，x_2'）表示出來，這就是所謂的坐標變換。（4・2）與（4・3）之係數行列式間的關係是互為轉置，且為正則。

（4・3）可以簡單地寫成：

$$(4\cdot4)\quad x = L^t\mathbf{x}' \qquad \mathbf{x}' = (L^t)^{-1}\mathbf{x}$$

即　L為 2×2 矩陣且將$\mathbf{R}^2$ 映至$\mathbf{R}^2$。

從現在起，我們考慮坐標變換的一般情形。

設由 $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ 的變換為 $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

一般寫作：

$$(4\cdot5)\begin{cases}y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{cases}\qquad\text{或 }A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

則（4・4）與（4・5）之形式完全相同，但它們的幾何意義則完全不同。事實上，（4・4）是將原像 $\mathbf{x}$之坐標，依A的變換映至其像 $\mathbf{y}$ 的坐標。但（4・4）所表示的是同一個向量$\mathbf{x}$的坐標，用新坐標表示出來而已。也可以說（4・5）的情形，是在同一基底下的變換，而（4・4）則變換基底向量。像這樣在幾何意義上當然不同，不過我們不關係到幾何學的內容，只用式子來考慮，則可以簡潔地表出其間的關係不也是很方便嗎？為此我們來考慮（4・5）兩式：

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

用向量的符號，可以簡單地寫作

$$\mathbf{y}=A\,\mathbf{x}$$

如果向量 $\mathbf{y}$ 經變換 B 映至 $\mathbf{x}'$ ，則

$$\mathbf{x}'=B\mathbf{y}$$

此時

$$x'=BAx$$

換句話說，這是（4・4）的 $\mathbf{x}'$ 與 $\mathbf{x}$ 間的關係用矩陣之積 AB 直接求出來，即爲綫性變換 A 及 B 的積，因而得

$$(4\cdot 6)\qquad (L^t)^{-1}=BA$$

此時 $\mathbf{x}$ 是用舊坐標表示，而 $\mathbf{x}'$ 則用新坐標表示。舉一個例子來說：

例 1　設 $y_1=x_1+2x_2$ ， $y_2=3x_1+4x_2$ 爲關於基底向量 $\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_2$ 之綫性變換，而新基底向量爲 $\mathbf{e}'_1$ ， $\mathbf{e}'_2$ 其間的關係（即坐標變換）爲

$$\mathbf{e}'_1=11\,\mathbf{e}_1+7\,\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{e}'_2=3\,\mathbf{e}_1+2\,\mathbf{e}_2$$

試求原綫性變換改用新基底時之坐標表示。

解，由條件，

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ L^t=\begin{pmatrix}11&3\\7&2\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=L^t\mathbf{x}'$$

因 $|L|=1\neq 0$ ，L^{-1} 存在，求之得

$$(L^t)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-7&11\end{pmatrix},\ \mathbf{x}'=(L^t)^{-1}\mathbf{x}$$

同樣的 $\mathbf{y}$ 經新坐標變換得　$\mathbf{y}'=(L^t)^{-1}y$ ，但　$\mathbf{y}=Ax=AL^t\mathbf{x}'$ ，故

$$(4\cdot 7)\qquad \mathbf{y}'=(L^t)^{-1}AL^t\,\mathbf{x}'$$

算出

$$\widetilde{A}=(L^t)^{-1}AL^t=\begin{pmatrix}2&-3\\-7&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&3\\7&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-133&-37\\496&138\end{pmatrix}$$

故得

$$y'_1=-133x'_1-37x'_2$$
$$y'_2=496x'_1+138x'_2$$

註：今後如果要求給定之變換 A 關於新坐標的變換，可適用（4・7）求出，即 A ，L 已知時，只要 $|L|\neq 0$ 則（4・7）恒可求得。

問，讀者在例 1 中是否能檢驗 $|A|=|\widetilde{A}|$ ？

§ 4・3　三維空間的坐標變換

設 $\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_2$ ， $\mathbf{e}_3$ 爲基底的三維空間 $\mathbf{R}^3$ ，想變換成以 $\mathbf{e}'_1$ ， $\mathbf{e}'_2$ ， $\mathbf{e}'_3$ 爲新基底，則其間的關係可用下式表示

$$(4\cdot 8)\quad \begin{cases}\mathbf{e}'_1=\ell_{11}\,\mathbf{e}_1+\ell_{12}\,\mathbf{e}_2+\ell_{13}\,\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}'_2=\ell_{21}\,\mathbf{e}_1+\ell_{22}\,\mathbf{e}_2+\ell_{23}\,\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}'_3=\ell_{31}\,\mathbf{e}_1+\ell_{32}\,\mathbf{e}_2+\ell_{33}\,\mathbf{e}_3\end{cases}$$

如同§4・2 在2維所討論之情形一樣，如設上式右邊之係數矩陣爲L，則因（4・8）左邊之行列式$D(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$等於其右邊之行列式，即

$$D(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = |L|\, D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

此處$|L|$表L的行列式。且因基底的行列式不爲0，故L爲正則，即$|L| \neq 0$

今若有一向量x關於基底$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$之坐標爲(x_1, x_2, x_3)而關於$\mathbf{e}'_1$，$\mathbf{e}'_2$，$\mathbf{e}'_3$之坐標爲(x'_1, x'_2, x'_3)，則新舊坐標間有下列關係式

$$(4 \cdot 9)\quad \begin{cases} x_1 = \ell_{11} x'_1 + \ell_{21} x'_2 + \ell_{31} x'_3 \\ x_2 = \ell_{12} x'_1 + \ell_{22} x'_2 + \ell_{32} x'_3 \\ x_3 = \ell_{13} x'_1 + \ell_{23} x'_2 + \ell_{33} x'_3 \end{cases}$$

這在§4・2於平面的情形相同，（4・9）的係數矩陣則爲（4・8）的係數矩陣之轉置，以L^t表示。則（4・9）可用向量形式表成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ \ell_{12} & \ell_{22} & \ell_{32} \\ \ell_{13} & \ell_{23} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

或

$$(4 \cdot 10)\qquad \mathbf{x} = L^t\, \mathbf{x}'$$

其中 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

反之

$$\mathbf{x}' = (L^t)^{-1}\mathbf{x}$$

當然這裡$(L^t)^{-1}$存在的保證是由$|L| = |L^t| \neq 0$而來。

在$\mathbf{R}^3$中若考慮直交坐標系，而各坐標軸之單位向量$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$是互相直交且爲$\mathbf{R}^3$之基底。今欲將此基底轉換成另一組單位長之直交向量$\tilde{i}$，$\tilde{j}$，$\tilde{k}$。此時（4・8）寫成

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{i}} &= \ell_1 \mathbf{i} + m_1 \mathbf{j} + n_1 \mathbf{k} \\ \tilde{\mathbf{j}} &= \ell_2 \mathbf{i} + m_2 \mathbf{j} + n_2 \mathbf{k} \\ \tilde{\mathbf{k}} &= \ell_3 \mathbf{i} + m_3 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

則

$$L = \begin{pmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix},\quad L^t = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

因$\tilde{\mathbf{i}}$，$\tilde{\mathbf{j}}$，$\tilde{\mathbf{k}}$之長度都是1，由畢氏定理很容易得

$$(4 \cdot 11)\quad \begin{cases} \ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, & \ell_1\ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\ \ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, & \ell_1\ell_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0 \\ \ell_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, & \ell_2\ell_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \end{cases}$$

故在這種情形

$$(4 \cdot 12)\qquad L L^t = I \qquad (I \text{ 爲單位矩陣})$$

且

$$L^t = L^{-1}$$

又因行列式 $|L L^t| = |I| = 1$，即

$$|L|\,|L^t| = |L|^2 = 1$$

故知

$$|L| = \pm 1$$

這種特殊的矩陣 L 稱為**直交矩陣**。一般則為下面定義

定義 直交矩陣(事實上是方陣)A 若其轉置 A^t 與其逆矩陣 A^{-1} 相等時(即 $A^t = A^{-1}$ 或 $AA^t = I$),則稱 A 為直交矩陣,直交矩陣之行列式值為 ± 1,即 $|A| = \pm 1$。

今設 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ 為空間 R^3 的綫性變換,則關於某基底 $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$ 的變換 A 之坐標表示可求得。如果換成新基底 $\mathbf{e}'_1$,$\mathbf{e}'_2$,$\mathbf{e}'_3$,其新舊基底間依(4・8)而定時,則綫性變換關於新基底之矩陣 $\widetilde{A}$ 也如 § 4・2 所得之結果相同,可表示成(參照(4・7))

$$\widetilde{A} = (L^t)^{-1} A L^t \qquad (4 \cdot 13)$$

且因 $|L| = \pm 1 = |L^t|$,所以

$$|\widetilde{A}| = |A|$$

這個變換的眞義示明了一綫性變換之行列式之值不因坐標變換(即與基底無關)而更動。本質上則變換的行列式之值與體積的比相等。換句話說在變換時,體積與坐標系無關係。

例 2 設關係基底 $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$ 之坐標表示的綫性變換 A 為

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

今有一新基底 $\mathbf{e}'_1$,$\mathbf{e}'_2$,$\mathbf{e}'_3$ 與原基底之間的坐標變換為

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

試求 A 關於新基底之坐標表示。

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

求得

$$(L^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

於是

$$(L^t)^{-1} A L^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

故關於新基底的坐標表示為

$$y'_1 = x'_1 + 3x'_2$$
$$y'_2 = x'_2$$
$$y'_3 = 4x'_1 - 2x'_2 + 2x'_3$$

例 3　若 3 維空間之基底變換爲

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$\longrightarrow\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$$

則 $\mathbf{x}=(2,1,-1)$ 對於新基底的成分（或說坐標）如何？又對於綫性變換之矩陣

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

將變成如何？（即求 $\widetilde{A}$ ）

解

$$因\ \begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_2'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_3'=\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\end{cases}\quad 所以\quad L^t=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

求得

$$(L^t)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$(L^t)^{-1}\mathbf{x}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots 答$$

又

$$(L^t)^{-1}AL^t=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots 答$$

§ 4・4　一般坐標變換

坐標變換的問題，是當向量空間的一基底變成另一基底時，要探討向量成份如何變化的問題。簡單的二、三維綫性空間的坐標變換已如上二節所述。現在我們就 n 維空間的坐標變換來考慮。

首先假設空間的基底爲 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$，而 $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\cdots\mathbf{e}_n'$ 爲另一個任意的基底。如設矩陣

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\qquad(4\cdot 14)$$

的各行爲新基底向量 $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\cdots,\mathbf{e}_n'$ 關於原基底的成分（也是坐標）。則因 $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\cdots\mathbf{e}_n'$ 爲綫性獨立，所以 C 當然是正則（即行列式 $|C|\neq 0$ ），此矩陣 C 稱爲坐標變換的矩陣。

若有某向量 $\mathbf{x}$ 關於基底 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$ 的成分爲 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，而關於新基底 $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\cdots,\mathbf{e}_n'$ 的成分爲 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$，則

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\\ &=x_1'\mathbf{e}_1'+x_2'\mathbf{e}_2'+\cdots+x_n'\mathbf{e}_n'\end{aligned}$$

而 $\mathbf{e}_i' = c_{1i}\mathbf{e}_1 + c_{2i}\mathbf{e}_2 + \cdots + c_{ni}\mathbf{e}_n$，$i=1$，$2$，…，$n$。於是向量 $\mathbf{x}$ 關於原基底之成分便成為下面矩陣的行向量

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \cdots + c_{1n}x_n' \\ c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \cdots + c_{2n}x_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \cdots + c_{nn}x_n' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$= C\mathbf{x}'$$

（注意 C 相當於§4·2及§4·3的 L^t）。

這意味着原基底與變換後之基底間的關係，在成分之間有綫性結合或綫性相關所表示之式，就是隨着綫性空間的正則變換所對應之向量成分所表出之式子，形成上是一致的。故正則矩陣給定時，就是給了一種抽象的變換，此變換可解釋為坐標變換，也可說是一般綫性空間的綫性變換。具體情形，要選那一種來解釋，則看問題所提供的內容來決定。

坐標變換變為綫性變換的矩陣問題在上一節在二維之情形已看過，今就 n 維之情形來觀察（形式上是相同的）；設關於基底 $\mathbf{e}_1$，…，$\mathbf{e}_n$ 所給的綫性變換為 A，則行向量 x 經 A 變換到行向量 $\mathbf{y}$ 時，乃用下式表出

$$(4\cdot15)' \qquad \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

此處若以矩陣 C 施行坐標變換，結果 x 變成 $\mathbf{x}'$，$\mathbf{y}$ 變成 $\mathbf{y}'$。此時因

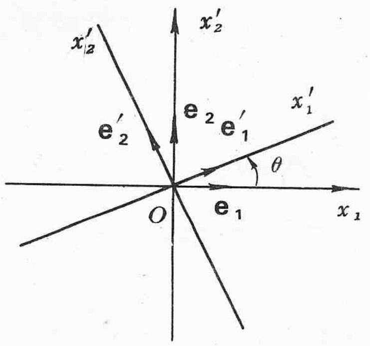
$$\mathbf{x} = c\mathbf{x}' \qquad y = C\mathbf{y}'$$

故

$$(4\cdot16) \qquad \mathbf{y}' = C^{-1}\mathbf{y} = C^{-1}A\mathbf{x} = C^{-1}AC\mathbf{x}'$$

這就是以新基底為準的綫性變換之矩陣 $C^{-1}AC$。（注意比較§4·3之 $(L^t)^{-1}AL^t$，兩者形式上完全相同），習慣上以 $A = C^{-1}AC$ 表示綫性變換 A 關於新坐標的的綫性變換（其中 C 是坐標變換的矩陣）。

讀者在高中有平面上的平移與轉軸的坐標變換，平移屬於仿射（即好像綫性之變換），而轉軸是一種綫性變換。如設原坐標軸轉一個 θ 角，則新坐標軸上之單位向量 $\mathbf{e}_1'$，$\mathbf{e}_2$ 關於原坐標軸上的單位向量 $\mathbf{e}_1$，e_2 之成分可容易地寫出來為



$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{e}_2' = -\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2$$

於是（3·7）之矩陣 C 為

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

因此一向量 $\mathbf{x}$ 在新坐標（x_1'，x_2'）與原坐標（x_1，x_2）之間的關係為

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

一般要求某曲綫在新坐標下之方程式則用

$$x_1 = \cos\theta\, x_1' - \sin\theta\, x_2'$$
$$x_2 = \sin\theta\, x_1' + \cos\theta\, x_2'$$

代入化簡便得。

練 習 題

1. 在直交坐標軸 $O-xyz$ 中之兩點 A，B 的坐標分別爲（1，1，1），（1，2，−3），試證明 $OA \perp OB$。
   此時分別以 OA，OB 作爲新坐標軸 X，Y 之正的半直綫，做一新坐標軸系 $O-XYZ$，試作舊坐標（x，y，z）用新坐標（X，Y，Z）表示的變換式。

2. 設 $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \dfrac{1}{2}(\ \ 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{e}_2' = \dfrac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \ \ 3\mathbf{e}_2), \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 \end{cases}$

   $\begin{cases} \mathbf{e}_2'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3') \\ \mathbf{e}_3'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3'), \qquad \mathbf{e}_1'' = \mathbf{e}_1' \end{cases}$

   試求由坐標系（$\mathbf{O}$，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$）變換到（$\mathbf{O}$，$\mathbf{e}_1''$，$\mathbf{e}_2''$，$\mathbf{e}_3''$）的坐標變換。

3. 設直交坐標軸 $O-xyz$ 依 z 軸之周圍轉 θ 角的位置得一新直交坐標軸 $O-ZXY$ 時，試證明一點 P 之坐標（x，y，z）與新坐標（X，Y，Z）之間的關係爲

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \qquad y = X\sin\theta + Y\cos\theta, \qquad z = Z$$

略　　解

1. 由畢氏定理得 $OA \perp OB$。

   置
$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_2 - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}_3' = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 + r\mathbf{e}_3$$

   使 $\mathbf{e}_1' \perp \mathbf{e}_3'$，$\mathbf{e}_2' \perp \mathbf{e}_3'$，且 $|L| = 1$ 時求得 p，q，r，結果答案爲

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{14}}Y - \frac{5}{\sqrt{42}}Z$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{2}{\sqrt{14}}Y + \frac{4}{\sqrt{42}}Z$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}X - \frac{3}{14}Y + \frac{1}{42}Z$$

2. 由

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}''_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}''_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right) \\ \mathbf{e}''_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}x''_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}x''_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x''_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x''_1 - \frac{\sqrt{6}}{4}x''_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}x''_3 \\ x_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}x''_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x''_3 \end{aligned}\right.$$

3. 利用 $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1\cos\theta + \mathbf{e}_2\sin\theta$ ，$\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1\sin\theta + \mathbf{e}_2\cos\theta$ ，$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$ 去證明即可。

〔預告：下一次（第四次）講**固有值與固有向量**〕

—本文作者現任教於清大數學系