

(4. 朱建正來函 [編註])

$$\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x}$$

故依常規見的 $u = \tan \frac{x}{2}$ 的代換，上式化爲

$$\begin{aligned} \int \frac{2 du}{\frac{1+u^2}{1-u^2}} &= \int \frac{2 du}{1-u^2} = \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + c \\ &= \log \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} + c = \log | \sec x + \tan x | + c \\ &= \log \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + c \end{aligned}$$

這樣就不能稱爲技術了。在數學史上，

$\int \sec x dx$ 與 mercator 投影有關，而用 mercator 投影的地圖又爲航海家所普遍採用，故很早就有人將 $\int \sec x dx$ 的積分值列表應用。又三角函數的對數也因爲求解三角形的需要列出成表。

因此人們很早就發現 $\int \sec x dx$ 與 $\log \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|$ 之間的關係，只是百思不得其解，甚至有人懸賞求解。然自微積分學基本定理闡明之後，此二式相等就很明顯了。

用 $u = \sec x + \tan x$ 的代換，顯然是已知答案的辦法。在初等微分方程式的書中，這種把答案微分來「證明」此答案滿足微分方程式的例子還有很多。

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx$ 沈墉教我們微分方程式時，就出過這種題目。標準做法就是背出答案再加以驗證。有少數學生僅僅背出答案，但並未明白地驗證。沈先沈先生說，就算答案對也要加以驗證才算是在答試題啊，該題乃以零分計算。

[編註] 朱建正先生來函係答覆本刊第十八期數播信箱林東棋來函之提問。