因而
$$\frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| \leq \sqrt{\frac{A}{n}}+\epsilon$$

當 $n\to\infty$ 時
$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| \leq \epsilon$$

由於 σ 可任意小，同樣 ϵ 亦可，即得
$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| = 0$$

由於 $0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| \leq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| = 0$

易見此式已證明了我們所要的結果：
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n^2} a_K = 0$$

5202（台北工專林建宏同學解）

設 $|A| = |a_{ij}|$ 爲 n 階行列式，則由行列式的定義知

(1) $\quad |A| = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1,(\sigma)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots\cdots a_{n,\sigma(n)}$

其中 S_n 記爲所有 $S=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ 的排列所成的集合，而 $sgn(\sigma)$ 表＋或－，取決於排列 σ 爲偶或奇。因

$$\begin{aligned} a_{ij} &\equiv 0 \quad mod \quad 2 \quad (i=j) \\ &\equiv 1 \quad mod \quad 2 \quad (i\neq j) \end{aligned}$$

故至少含一 a_{ii} 的所有 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 必爲偶數，令其總和爲 U，而不含 a_{ii} 的所有 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 必是奇數，以 U^* 表其總和。顯然，由(1)可得

$$|A| = U+U^* \equiv U^* \quad mod \quad 2$$

因 U^* 表不含 a_{ii} 的所有 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 的總和，而每一個 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$，$\sigma(i)\neq i$，均爲奇數，故所有 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 的數目決定 U^* 之奇偶性質。然又因 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$，$\sigma(i)\neq i$ 的總數爲 σ 的排列總數所決定，因此我們設

$$S=\{1,2,\cdots\cdots,n\},$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots\cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots\cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

爲 S 的一種排列，此處 $\sigma(i)\neq i$，$1\leq i\leq n$。

令　$\Omega_n(\sigma)$ 表 σ 的排列總數，則簡單的計算給出，$\Omega_1(\sigma)=0$，$\Omega_2(\sigma)=1$。

故得 $n=1$ 時，

$$|A| \equiv U^* \equiv \Omega_1(\sigma) \equiv 0 \quad mod \quad 2$$

即

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow singular$$

或

$$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow non\text{-}singular$$

另外，$n=2$

$$|A| \equiv U^* \equiv \Omega_2(\sigma) \equiv 1 \quad mod \quad 2$$

即

$$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow non\text{-}singular$$

現考慮$n \geq 3$的情況下，分偶數與奇數兩方面着手。由於

$$\Omega_n(\sigma)=\sum_{i=2}^{n} \Omega_n \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{\substack{\sigma(i)=1 \\ i=2}}^{n} \Omega_n \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & i & \cdots\cdots & n \\ i & \sigma(2) & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}+\sum_{\substack{\sigma(i)\neq 1 \\ i=2}}^{n} \Omega_n \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & i & \cdots\cdots & n \\ i & \sigma(2) & \cdots\cdots & \sigma(1) & \cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$=(n-1)\left[\Omega_{n-2}(\sigma)+\Omega_{n-1}(\sigma)\right]$$

因而我們得一遞迴方程

(2)　$$\Omega_n(\sigma)=(n-1)\left[\Omega_{n-2}(\sigma)+\Omega_{n-1}(\sigma)\right] \quad n \geq 3 \text{成立}$$

令　$k \in N$，則當$n=2k+2$時，由(2)式可得

$$\Omega_n(\sigma)=\Omega_{2k+2}(\sigma)$$
$$=(2k+1)\left[\Omega_{2k}(\sigma)+\Omega_{2k+1}(\sigma)\right]$$
$$=(2k+1)\Omega_{2k}(\sigma)+(2k+1)(2k)\left[\Omega_{2k-1}(\sigma)+\Omega_{2k}(\sigma)\right]$$

即

$$\Omega_{2k+2}(\sigma)\equiv(2k+1)\Omega_{2k}(\sigma) \quad mod \quad 2$$

重複運用上式，得

$$\Omega_{2k+2}(\sigma)\equiv(2k+1)\Omega_{2k}(\sigma)$$
$$\equiv(2k+1)(2k-1)\Omega_{2k-2}(\sigma)$$
$$\equiv\cdots\cdots$$
$$\equiv(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots\cdots 5\cdot 3\cdot \Omega_2(\sigma)$$
$$\equiv(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$
$$\equiv 1 \quad mod \quad 2$$

所以

$$|A| \equiv U^{*} \equiv \Omega_{2k+2}(\sigma) \equiv 1 \quad mod \quad 2$$

即

$$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow non\text{-}singular$$

另外，當$n=2k+1$時，由(2)式得到

$$\Omega_n(\sigma)=\Omega_{2k+1}(\sigma)$$
$$=(2k)\left[\Omega_{2k-1}(\sigma)+\Omega_{2k}(\sigma)\right]$$
$$\equiv 0 \quad mod \quad 2$$

故

$$|A| \equiv U^{*} \equiv \Omega_{2k+1}(\sigma) \equiv 0 \quad mod \quad 2$$

即

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow singular$$

或

$$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow non\text{-}singular$$

結論：若$k \in N$，則

(1)當$n=2k$時，$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow non\text{-}singular$

(2)當$n=2k-1$時，$|A| = 0 \Longleftrightarrow singular$

或$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow non\text{-}singular$