第十八期 問題應答優勝名單

5201 優良：林建宏（台北工專）；劉奇偉、黃毅英（香港大學數學系）
良好：林傳儒（師大數學系）

5202 優良：林建宏（台北工專）

上期徵答問題詳解

5201 解一（香港大學劉奇偉與黃毅英共同解答）

由於 $\sum_{K=1}^{\infty} a_K^2 < \infty$，有正數$M$使得 $|a_K| \leq M$，故

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]} a_K \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]} |a_K| \leq \frac{M[\sqrt{n}]}{n} \longrightarrow 0 \text{，當 } n \to \infty$$

此處［ x ］表小於x之最大整數。再者由科西準則（*Cauchy cntenion*）

$$\sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2} a_K^2 \to 0 \qquad \text{當 } n \to \infty$$

故有，

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n^2} a_K \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]} a_K + \sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2} a_K \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]} |a_K| + \frac{1}{n} \sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2} a_K |$$

$$\leq \frac{M[\sqrt{n}]}{n} + \left(\sqrt{\sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2} |a_K^2|} \right) \left(\frac{1}{n} \sqrt{\sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2}} \right)$$

（科兩不等式）

$$\leq \frac{M[\sqrt{n}]}{n} + \sqrt{\sum_{K=[\sqrt{n}]+1}^{n^2}}$$

$$\to 0 \qquad \text{當 } n \to \infty$$

證畢。

5201 解二（台北工專林建宏同學解）

先令

$$\sum_{K=1}^{\infty} a_K^2 = 1 \lim_{M \to \infty} S_M$$

緊接著，我們需用到著名的*Cauchy-Schwarz*不等式：

$$\sum_{K=1}^{m} |a_K b_K| \leq \left(\sum_{K=1}^{m} a^2{}_K \right)^{1/2} \left(\sum_{K=1}^{m} b^2{}_K \right)^{1/2}$$

在上式中，令 $b_K=1$，於是給出

(1) $$\sum_{K=1}^{m}|a_K|\leq\left(\sum_{K=1}^{m}a^2{}_K\right)^{1/2}\left(\sum_{K=1}^{m}1\right)^{1/2}=\left(\sum_{K=1}^{m}a^2{}_K\right)^{1/2}\sqrt{m}$$

很明顯地，由 $Gauchy$-$Schwarz$ 不等式，下列各式亦成立

$$\sum_{K=m+1}^{2m}|a_K|\leq\left(\sum_{K=m+1}^{2m}a^2m\right)^{1/2}\sqrt{m}=\left(S_{2m}-S_m\right)^{1/2}\sqrt{m}$$

(2) $$\sum_{K=2m+1}^{3m}|a_K|\leq\left(\sum_{K=2m+1}^{3m}a^2{}_m\right)^{1/2}\sqrt{m}=\left(S_{3m}-S_{2m}\right)^{1/2}\sqrt{m}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{K=m^2-m+1}^{m^2}|a_K|\leq\left(\sum_{K=m^2-m+1}^{m^2}a^2{}_K\right)^{1/2}\sqrt{m}=\left(S_{m^2}-S_{m^2-m}\right)^{1/2}\sqrt{m}$$

整理(1)，(2)之所有不等式得

(3) $$\sum_{K=1}^{m^2}|a_K|\leq\sqrt{m}\left[\left(\sum_{K=1}^{m}a^2{}_K\right)^{1/2}+\sum_{K=2}^{m}\left(S_{Km}-S_{Km-m}\right)^{1/2}\right]$$

再根據 $Cauchy$-$Schwarz$ 不等式，令 $b_K=1$，$a_K=\left(S_{Km+m}-S_{Km}\right)^{1/2}$ 於是我們得到

$$\sum_{K=1}^{m-1}\left(S_{Km+m}-S_{Km}\right)^{1/2}\leq\left[\sum_{K=1}^{m-1}\left(S_{Km+m}-S_{Km}\right)\right]^{1/2}\sqrt{m-1}$$

$$=\left(S_{m^2}-S_m\right)^{1/2}\sqrt{m-1}$$

$$\leq\left(S_{m^2}-S_m\right)^{1/2}\sqrt{m}$$

即

$$\sum_{K=1}^{m-1}\left(S_{Km+m}-S_{Km}\right)^{1/2}\leq\left(S_{m^2}-S_m\right)^{1/2}\sqrt{m}$$

或 $$\sum_{k=2}^{m}\left(S_{km}-S_{km-m}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(S_{m^2}-S_m\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{m}$$

所以(3)式又可化爲如下形式

(4) $$\sum_{k=1}^{m^2}|a_k|\leq\sqrt{m}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}a_k{}^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{m}\left(S_{m^2}-S_m\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

由於 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k{}^2=A<\infty$ A爲常數

故對一任意給定的 $\sigma=\epsilon^2$，$\epsilon>0$，必存在 $N=N(\sigma)$，使得當 $n\geq N$ 時

$$S_{n^2}-S_n=\sum_{k=n+1}^{n^2}a_k{}^2\leq\sigma=\epsilon^2$$

因爲 $\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2\leq\sum_{k=1}^{\infty}a_k{}^2=A$，所以 $\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2\leq A$ 必然成立。

故由(4)式得 $$\sum_{k=1}^{n^2}|a_k|\leq\sqrt{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{n}\left(S_{n^2}-S_n\right)^{\frac{1}{2}}\right]\leq\sqrt{n}\left[\sqrt{A}+\sqrt{n}\cdot\epsilon\right]$$

亦即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}|a_k|\leq\sqrt{\frac{A}{n}}+\epsilon$。另外我們知 $\left|\sum_{k=1}^{n^2}a_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n^2}|a_k|$

因而　$$\frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| \leq \sqrt{\frac{A}{n}}+\epsilon$$

當 $n\to\infty$ 時　$$\lim_{n\to\infty}\ \sup\frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| \leq \epsilon$$

由於 σ 可任意小，同樣 ϵ 亦可，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\ \frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| = 0$$

由於　$0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right|\leq\lim_{n\to\infty}\sup\ \frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{K=1}^{n^2} a_K\right| = 0$

易見此式已證明了我們所要的結果：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n^2} a_K = 0$$

5202（台北工專林建宏同學解）

設 $|A| = |a_{ij}|$ 爲 n 階行列式，則由行列式的定義知

(1)　$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1,(\sigma)}a_{2,\sigma(2)}\cdots\cdots a_{n,\sigma(n)}$

其中 S_n 記爲所有 $S=\{1,,2,\cdots\cdots,n\}$ 的排列所成的集合，而 $sgn(\sigma)$表＋或－，取決於排列 σ 爲偶或奇。因

$$\begin{aligned} a_{ij} &\equiv 0 \quad mod \quad 2 \quad (i=j) \\ &\equiv 1 \quad mod \quad 2 \quad (i\neq j) \end{aligned}$$

故至少含一 a_{ij} 的所有 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 必爲偶數，令其總和爲 U，而不含 a_{ii} 的所有 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 必是奇數，以 U^* 表其總和。顯然，由(1)可得

$$|A| = U+U^*\equiv U^* \quad mod \quad 2$$

因 U^* 表不含 a_{ii} 的所有 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 的總和，而每一個 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$，$\sigma(i)\neq i$，均爲奇數，故所有 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 的數目決定 U^* 之奇偶性質。然又因 $sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$，$\sigma(i)\neq i$ 的總數爲 σ 的排列總數所決定，因此我們設

$$S=\{1,2,\cdots\cdots,n\},$$

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots\cdots\cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2)\cdots\cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

爲 S 的一種排列，此處 $\sigma(i)\neq i$，$1\leq i\leq n$。

令　$\Omega_n(\sigma)$表 σ 的排列總數，則簡單的計算給出，$\Omega_1(\sigma)=0$，$\Omega_2(\sigma)=1$。

故得 $n=1$ 時，

$$|A|\equiv U^*\equiv\Omega_1(\sigma)\equiv 0 \quad mod \quad 2$$

即

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow singular$$

或

$$|A|\neq 0 \Longleftrightarrow non\text{-}singular$$

另外，$n=2$

$$|A|\equiv U^*\equiv\Omega_2(\sigma)\equiv 1 \quad mod \quad 2$$