應用數學試題解答

羅添壽 提供

〈高一部份〉

＜甲＞ 設 $AB=2x$ 公尺，$AD=y$ 公尺 則

$$\begin{cases} 2\times\dfrac{22}{7}x+2y=400 & ① \\ \dfrac{22}{7}x^2+2xy=10000 & ② \end{cases}$$

由①②聯立得

$11x^2-1400x+35000=0$

$\Rightarrow x=34.18$ 公尺

＜乙＞ 設標準重量為 x 公斤，每公斤 y 元

依題意知

$xy+xy+(35-2x)\cdot\dfrac{y}{2}=55\cdots①$

$xy+(35-x)\cdot\dfrac{y}{2}=45\cdots\cdots②$

由①$\Rightarrow 4xy+(35-2x)\cdot y=110$

$\Rightarrow y(2x+35)=110\cdots\cdots③$

由②$\Rightarrow 2xy+(35-x)y=90$

$\Rightarrow y(x+35)=90\cdots\cdots④$

$\dfrac{③}{④}\Rightarrow\dfrac{2x+35}{x+35}=\dfrac{110}{90}$

$\Rightarrow x=10$ 元，$y=2$ 公斤

＜丙＞ 依題意知 $10x+60y+200z=2000$

$\Rightarrow x+6y+20z=200\cdots\cdots①$

又 $x+y+z=100\cdots\cdots②$

由①②得 $5y+19z=100$

令 $y=1$，$z=5$ 為其一組解

$\therefore\begin{cases} y=1+19t \\ z=5-5t \end{cases}$ $t\in z\Rightarrow a=94-14t$

又 $x,y,z>0\Rightarrow-\dfrac{1}{19}<t<1$，$t\in z$

$\therefore t=0$

$\therefore x=94$，$y=1$，$z=15$

＜丁＞ $\because\dfrac{n}{2}\leq 25.3<\dfrac{n+1}{2}$

$\Rightarrow n\leq 50.6<n+1$

$\therefore n=50$

$\therefore z=22+49\times 4.5$

$=22+220.5$

$=242.5$ 元→計程車資

又 40分40秒 $=40\dfrac{2}{3}$ 分 $=\dfrac{122}{3}$ 分

$\because\dfrac{2n+1}{2}\leq\dfrac{122}{3}<\dfrac{2n+3}{2}$

$\Rightarrow n+\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{122}{3}<n+\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow n\leq\dfrac{122}{3}-\dfrac{1}{2}<n+1$

$\Rightarrow n\leq 40\dfrac{1}{6}<n+1$

$\therefore n=40$

$\therefore z=5+39\times 1.5=5+58.5$

$=63.5$ 元 ——→計時車資

∴總共 242.5 元＋63.5 元＝306 元

又 25 公里費時 40 分 30 秒之車資如上同為 306 元 ——→學生自習

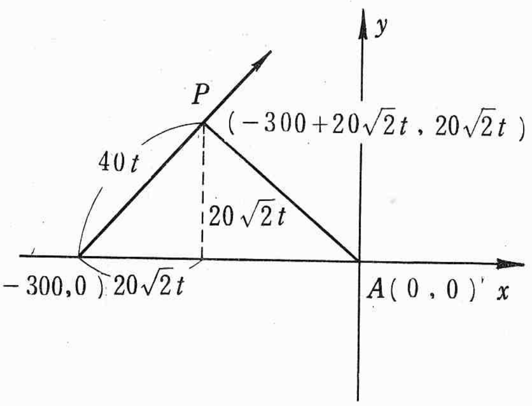
＜戊＞ 令至少 x 票，則

$1000-x<7x\Rightarrow x>\dfrac{1000}{8}$

$\therefore x=126$（票）

＜己＞ 以 A 為原點（0，0）

颱風中心現位於（－300，0），如圖



t 小時後颱風中心位置為 P，則

$P(-300+20\sqrt{2}t,\ 20\sqrt{2}t)$

若 A 在颱風圈內，則

$PA \leq 250 \Rightarrow PA^2 \leq 250^2$

$\Rightarrow (-300+20\sqrt{2}t)^2+(20\sqrt{2}t)^2 \leq 250^2$

$\Rightarrow 16t^2-120\sqrt{2}t+275 \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4} \leq t \leq \dfrac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}$

故 A 在 $(15\sqrt{2}-5\sqrt{7})/4$ 小時後即在颱風圈內，A 在颱風圈內之時間為

$\dfrac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}-\dfrac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}$

$=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ 小時

<寅> 設參加者共 x 人則全費用為 $(45x+460)$ 元，又除 1 人外其餘均繳 50 元，合計 $50(x-1)$ 元。

$\therefore 0<(45x+460)-50(x-1)<50$

$\Rightarrow 0<510-5x<50$

$\Rightarrow 92<x<102$

∴所求為 100 人或 101 人

<辛> 設兩地相距 x 公里則往返共費之時間

$$t=\frac{x}{m}+\frac{x}{m}$$

$$\therefore V=\frac{2x}{t}=\frac{2x}{\frac{x}{m}+\frac{x}{m}}=\frac{2mn}{m+n}$$

∴ V 為 m，n 之調和中項

<壬> ①將自然數分群為

$\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\}\cdots\cdots\cdots$

先求 1490 屬於第幾群？

$1+2+\cdots\cdots+(n-1)<1490 \leq 1+2+\cdots\cdots+n$

$\Rightarrow \dfrac{(n-1)\cdot n}{2}<1490 \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow n=55$

又 $1490-(1+2+\cdots\cdots+54)$

$=1490-\dfrac{54\times 55}{2}=5$

∴ 1490 在第 55 群第 5 個

又由圖知第奇數群自左下向右上算，偶數群自右上向左下算

∴第 55 群之首項在第 1 行第 55 列，故由此往右上算起第 5 個數即為 1490

$\therefore i=5,\ j=55-5+1=51$

$\therefore (i,j)=(5,51)$

② $\because a_{11}=1,\ a_{22}=5,\ a_{33}=13,\ a_{44}=25,\ a_{55}=41\cdots\cdots\cdots$

由差階數列知

$a_{nn}=2n(n-1)+1$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(2i^2-2i+1)$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}i^2-2\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$

<癸> 設 x 年後 B 銀行的本利和超過 A 銀行則

$50(1+0.02)^{3x}>53(1+0.06)^x$

$\Rightarrow (1.02)^{3x}>\dfrac{53}{50}(1+0.06)^x$

$\Rightarrow (1.02)^{3x}>(1.06)^{x+1}$

$\Rightarrow 3x\log 1.02>(x+1)\log 1.06$

$\Rightarrow x>50\cdots\cdots\cdots$

$\therefore x=51$（年）

<子> 設分裂 n 次後超過 100 萬個

$\Rightarrow 25.2^n>1000000 \Rightarrow 2^n>40000=4\times 10^4$

$\therefore n>\dfrac{\log 4\times 10^4}{\log 2}=\dfrac{4+2\log 2}{\log 2}\doteqdot 15.28 \quad \therefore n=16$

∴所求為 20 分× 16 = 320 分

= 5 小時 20 分

<丑> 設每年施放定量 a 之藥品，則在施放第四次時第一次施放之藥品殘留量有 0.9^3a，第二次有 0.9^2a 第三次有 $0.9a$，故施放第四次後土壤中藥品有

$0.9^3a+0.9^2a+0.9a+a$

$=3.439a$

再經 n 年後殘留量仍爲 $(3.439a)\times(0.9)^n$，而第二次散佈前之殘留量爲 $0.9a$

$\Rightarrow (3.439a)\times(0.9)^n<0.9a$

$\Rightarrow 3.439\times(0.9)^n<0.9$

$\Rightarrow (0.9)^{n-1}\cdot 3.439<1$

$\Rightarrow (n-1)\log\frac{3^2}{10}+\log 3.439<0$

$\Rightarrow (n-1)[2\times 0.4771-1]+0.5364<0$

$\Rightarrow n>12.7$

$\therefore n$ 之最小整數值爲 13

<寅> 設 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ 半徑分別爲 $r_1, r_2, r_3\cdots\cdots$

$\because \overline{OP}^2=\overline{OQ}^2+\overline{PQ}^2$

$\Rightarrow r_2=\frac{1}{\sqrt{2}}r$

同理

$r_3=\frac{1}{\sqrt{2}}r_2$, $r_4=\frac{1}{\sqrt{2}}r_3\cdots$

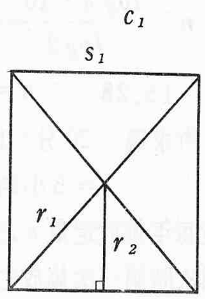
即 $r_1, r_2, r_3\cdots\cdots r_n\cdots\cdots$ 成 G・P

又 $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore r_n=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}\cdot r_1$

$\because r_n<\frac{1}{100}r_1\Rightarrow(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}\cdot r_1<\frac{1}{100}r_1\Rightarrow(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}<\frac{1}{100}$

$\Rightarrow n>1+\frac{2}{\log\sqrt{2}}=14.29$

$\therefore n=15$



<卯> 依題意令訂大型遊覽車 x 輛，小型遊覽車 y 輛，則

$47x+37y=3000$

$\Rightarrow y=81-x+\frac{3-10x}{37}$

令 $\begin{cases}x=4\\y=76\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x=4+37t>0\\y=76-47t>0\end{cases}$

$\Rightarrow -\frac{4}{37}<t<\frac{76}{47}$

$\therefore t=0,1$

$\therefore \begin{cases}x=4\\y=76\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=41\\y=29\end{cases}$ 共 2 組

又 $f(x,y)=800x+500y$

$\therefore f(4,76)=41200$ 元

$f(41,29)=47300$ 元

$\therefore$ 訂大型 4 輛，小型 76 輛最少費用 41200 元

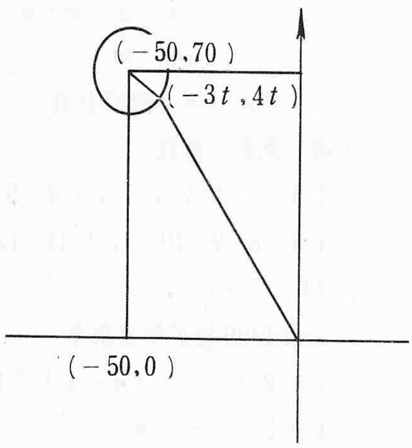
<辰> 定坐標如下圖，設 t 小時後到達研究院門口，此時位置爲 $(-3t, 4t)$

$\therefore \sqrt{(-3t+50)^2+(4t-70)^2}=5$

$\Rightarrow 5t^2-172t+1475=0$

$\Rightarrow t=\frac{86\pm\sqrt{21}}{5}$ 取負

$\therefore t\doteqdot 16$ 小時

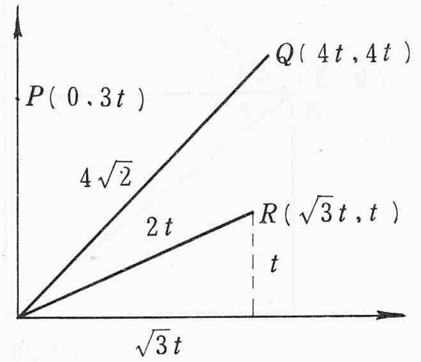


〈高二部份〉

<甲> ①依題意圖解之得 t 小時後甲、乙、丙三人位置分別爲 $P(0,3t)$，$Q(4t,4t)$，$R(\sqrt{3}t,t)$

② $a\triangle PQR=\frac{1}{2}\left|-8t^2-\sqrt{3}t^2\right|$

③令 $t=2\Rightarrow a\triangle ABC=16+2\sqrt{3}$
$=19.464$



<乙> ①設 t 小時後兩船距離最近

則 $x=at$，$y=5-2at$

$\therefore \ell^2=(at)^2+(5-2at)-2at\cdot(5-2at)\cos 60^\circ$

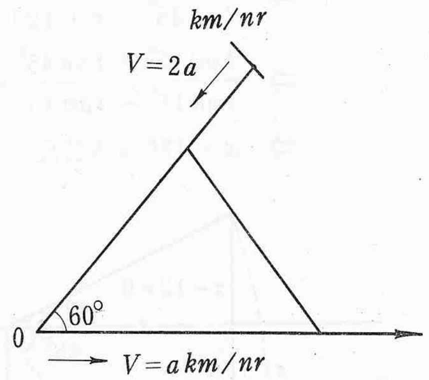
$=a^2t^2+4a^2t^2-20at+25-5at+2a^2t^2$

$=7a^2t^2-25at+25$

$\therefore \ell(t)=\sqrt{7a^2t^2-25at+25}$

當 $t=\frac{25}{14a}$ 時　$m=\frac{5\sqrt{21}}{14}$

且 $y=5-2\times a\times\frac{25}{14a}=\frac{10}{7}$ 公里



②當 $a=1$ 時

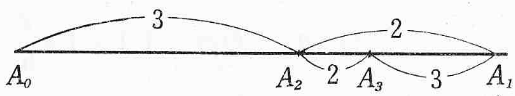
$\ell(t)=\sqrt{7t^2-25t+25}$

$\leq\sqrt{79/28}$

$\Rightarrow\frac{23}{14}\leq t\leq\frac{27}{14}$

$\therefore t=\frac{2}{7}=0.29$

<丙>



依照題意知

$\frac{a_n-a_{n-2}}{a_{n-1}-a_n}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 5(a_n-a_{n-1})=-2(a_{n-1}-a_{n-2})$，$\forall n\geq 2$

$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=-\frac{2}{5}(a_{n-1}-a_{n-2})$，$\forall n\geq 2$

$\Rightarrow a_2-a_1=-\frac{2}{5}(a_1-a_0)$

$=-\frac{2}{5}(1-0)=-\frac{2}{5}$

$\Rightarrow a_3-a_2=-\frac{2}{5}(a_2-a_1)$

$=(-\frac{2}{5})^2$

$a_4-a_3=-\frac{2}{5}(a_3-a_2)$

$=(-\frac{2}{5})^3$

……………………………………………

$a_n-a_{n-1}=-\frac{2}{5}(a_{n-1}-a_{n-2})$

$=(-\frac{2}{5})^{n-1}$

兩兩相加得

$a_n-a_1=(-\frac{2}{5})+(-\frac{2}{5})^2+\cdots\cdots$

$+(-\frac{2}{5})^{n-1}$　$(\because a_1=1)$

$\Rightarrow a_n=\frac{1\cdot(1-(-\frac{2}{5})^n)}{1-(-\frac{2}{5})}$

$=\frac{5}{7}(1-(-\frac{2}{5})^n)$

$\therefore a_5=\frac{5}{7}(1-(-\frac{2}{5})^5)=0.70697$

$\therefore A_5$ 距 A_0（甲地）

100 公里× 0.70697 = 70.697 公里

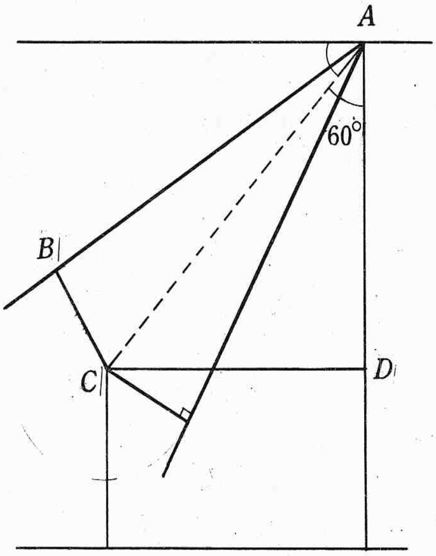
又 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{7}(1-(-\frac{2}{5})^n)$

$= \frac{5}{7}$

⇒ n 很大時 A_n 距甲地 71.429 公里

<丁> ① $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos 2\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0} \frac{2\sin^2\theta}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to 0} 2(\frac{\sin\theta}{\theta})^2 = 2\times 1 = 2$



② △ABC 中

$\sin 1' = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = \frac{3}{1'}$

$= \frac{3\times 60\times 180}{TC\pi}$

又 △ACD 中

$\cos 60^\circ = \frac{AD}{AC}$

⇒ $AD = AC\cos 60^\circ$

$= \frac{3\times 60\times 180}{\pi}\times\frac{1}{2}$

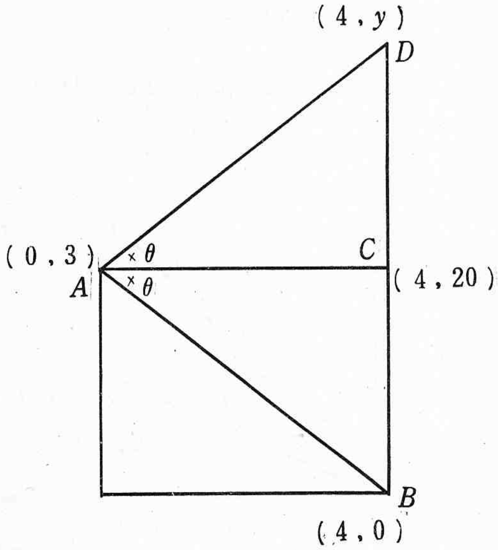
= 5155 公尺

∴ AE = 5155 + 100 = 5255 公尺

<戊> ①將其坐標化，如圖且設 10 公尺爲 1 單位

⇒ 由角平分綫知

$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$



$\therefore \frac{5}{\sqrt{4^2+(y-3)^2}} = \frac{20}{y-20}$

$\therefore 15y^2 - 56y = 0$ ⇒

⇒ $y = \frac{56}{15} \doteqdot 3.73$

∴所求爲 10 × 3.73 = 373 公尺

<己> 設塔高 x 則

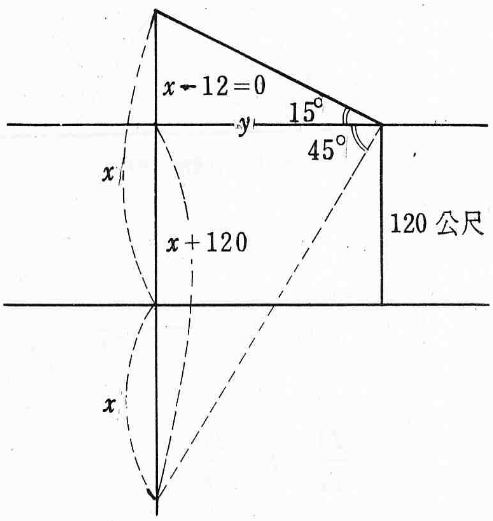
$\tan 15^\circ = \frac{x-120}{y}$

$\tan 45^\circ = \frac{x+120}{y}$

⇒ $\frac{\tan 15^\circ}{\tan 45^\circ} = \frac{x-120}{x+120}$

⇒ $\frac{\tan 15^\circ + \tan 45^\circ}{\tan 15^\circ - \tan 45^\circ} = \frac{2x}{-240}$

⇒ $x = 120\sqrt{3}$ 公尺



<庚> 設 OH 爲氣球之高度 h

則 $\tan 30^\circ = \dfrac{h}{OA} \Rightarrow OA = \sqrt{3}\,h$

$\tan 45^\circ = \dfrac{h}{OB} \Rightarrow OB = h$

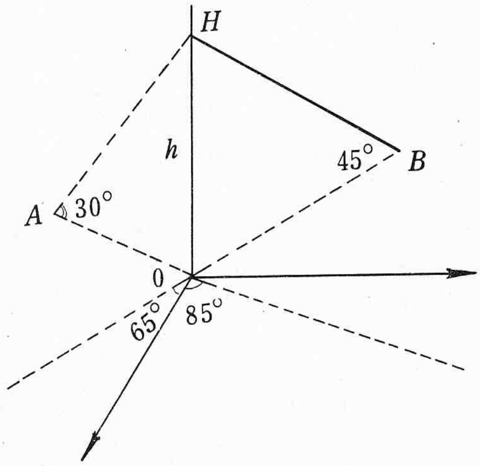
考慮 $\triangle OAB$

$\because AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 150^\circ$

$\Rightarrow AB^2 = 7h^2 = 4900$

$\Rightarrow h^2 = 700$

$\Rightarrow h = \sqrt{700}$ 公尺



<辛> $\because PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(a\cos t - b\sin 2t)^2 + (a\sin t - b\cos 2t)^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin 3t}$

$\therefore 0 \leq t \leq 2\pi \quad \therefore 0 \leq 3t \leq 6\pi$

①當 $\sin 3t = 1$，時 PQ 最小

（P，Q 相距最近）

即 $3t = 2n\pi + \pi/2$

$\Rightarrow t = 2n\pi/3 + \pi/6$

$\therefore n = 0, 1, 2$

$\Rightarrow$ 時間 $t = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{3}{2}\pi$ 時

$PQ = |a - b|$

②當 $\sin 3t = -1$ 時，PQ 最大

$\Rightarrow t = \dfrac{2n\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore n = 1, 2, 3$

$\Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$ 時

$PQ = (a + b)$

<壬> 設小貨車每天開 x 輛，大貨車每天開 y 輛

	小貨車	大貨車	
載重	4	5	30
費用	500	800	9

依題意知 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x + y \leq 9 \\ 4x + 5y \geq 0 \end{cases}$

$f(x, y) = 500x + 800y$

$\because x, y \in N \cup \{0\}$

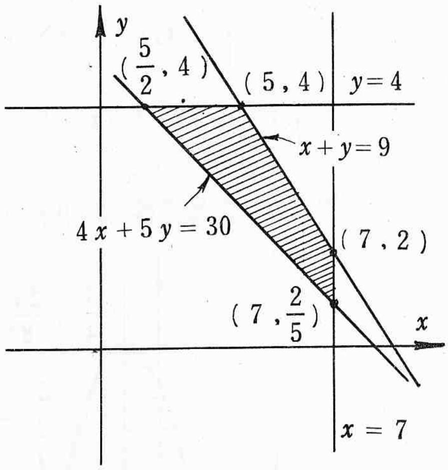
$\therefore$ 由 y 討論之

y	4	3	2
x	3, 4, 5, 6	4, 5, 6	5, 6, 7

$\therefore M = 10$

由討論知：$x = 5$，$y = 2$ 時 $f(x, y)$

最小值爲 $m = 4100$ 元



<癸> 設由 A 倉庫送至 C、D、E 站各 x_1，x_3，x_5 仟加侖；B 倉庫送至 C、D、E 站各 x_2，x_4，x_6 仟加侖

依題意知 $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 \leq 8 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 7 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_3 + x_4 = 5 \\ x_5 + x_6 = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 5 - x_3 \geq 0 \\ x_5 = 8 - x_1 - x_3 \geq 0 \\ x_6 = 7 - x_4 - x_2 \end{cases}$

$= x_1 + x_3 - x_2 \geq 0$

所需費用爲

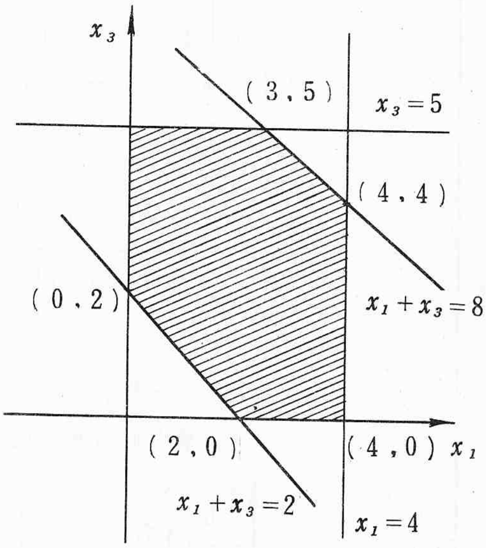
$1000x_1+2500x_2+1500x_3+3500x_4+1000x_5+2000x_6$

$=500(-x_1-2x_3+63)$

當 $(x_1,x_3)=(3,5)$

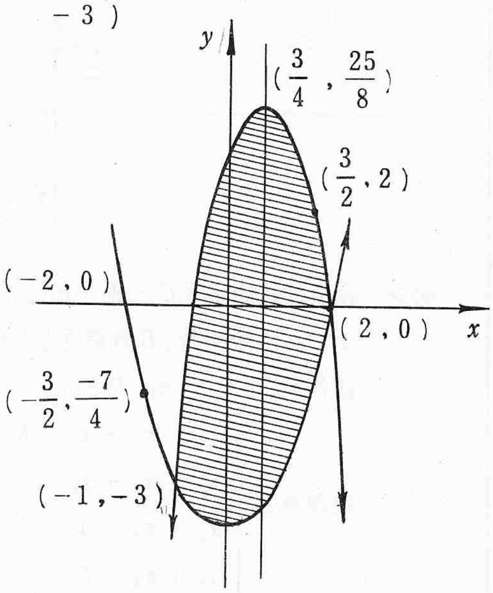
有極小值 25000 元

即 $x_2=1$，$x_4=0$，$x_5=0$，$x_6=6$



<子> 由 $\begin{cases} y=-2x^2+3x+2 \\ y=x^2-4 \end{cases}$

聯立得交點坐標爲 $(2,0)$，$(-1,-3)$



由 $\begin{cases} y=k-3x \\ y=-2x^2+3x+2 \end{cases}$

$\Rightarrow\ 2x^2-6x+k-2=0$，$x\in R$

$\therefore \triangle\geq 0\Rightarrow k\leq\frac{13}{2}$代入上式

得 $(2x-3)^2=0$

$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$，$y=2$ 爲切點坐標

由 $\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=k-3x \end{cases}\Rightarrow x^2+3x-k-4=0$

$\because x\in R$

$\therefore \triangle\geq 0\Rightarrow k\geq-\frac{25}{4}$代入上式

$\Rightarrow\ (x+\frac{3}{2})^2=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{\pi}{4}$

$\therefore (-\frac{3}{2},-\frac{7}{4})$爲切點，但不合

$\because -1\leq x\leq 2$

$\therefore$

	$k=3x+y$	
$(2,0)$	6	
$(\frac{3}{2},2)$	$\frac{13}{2}$	$\to M$
$(-1,-3)$	-6	$\to m$
$(-\frac{3}{2},-\frac{\pi}{4})$	$-\frac{25}{4}$（不合）	

<丑> $B_1A_2=A_1B_1\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{7}$

$A_2B_2=B_1A_2\cos 30^\circ=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\cdot\sqrt{7}$

$A_2B_3=A_2B_2\cos 30^\circ=(\frac{\sqrt{3}}{2})^3\cdot\sqrt{7}$

……………………………………………

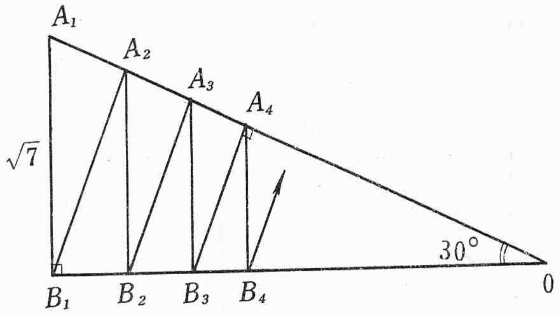
又 A_1B_1、$B_1A_2=\sqrt{7}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{7}\cos 150^\circ$

$=-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\cdot(\sqrt{7})^2$

$\overrightarrow{A_2B_2}\cdot\overrightarrow{B_2A_3}=-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\cdot(\sqrt{7})^2$

$\therefore r=(\frac{\sqrt{3}}{2})^4$

$\therefore s=\dfrac{-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\cdot(\sqrt{7})^2}{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^4}=-12$



<寅> 依題意令 $A_n(x_n, y_n)$ 則

$x_1 = x_2 = 1$

$x_3 = x_4 = 1 - (\frac{2}{3})^2$

$x_5 = x_6 = 1 - (\frac{2}{3}) + (\frac{2}{3})^4$

…………………………………………………

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = 1 - (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^4 - (\frac{2}{3})^6 + \cdots$

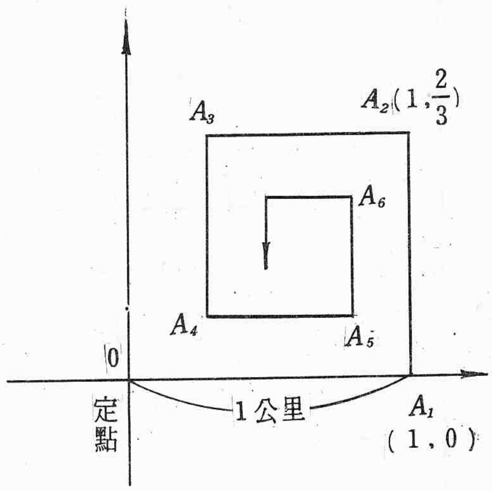
$= \frac{1}{1 + (\frac{2}{3})^2} = \frac{9}{13}$

$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^5 - \cdots$

$= \frac{9}{13} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{13}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} OA_n = \sqrt{(\frac{9}{13})^2 + (\frac{6}{13})^2}$

$= \frac{3}{\sqrt{13}} \doteqdot 0.83$ 公里



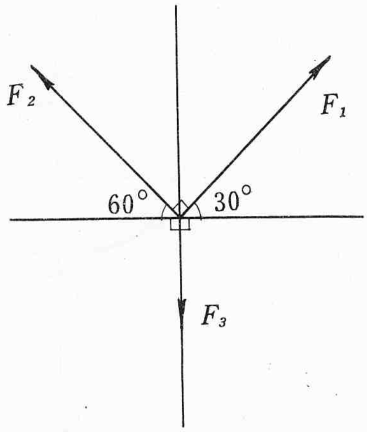
<卯> 令 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{CW} = \overrightarrow{F_3}$

由力的合成與正弦定律

知 $\frac{|\overrightarrow{F_1}|}{\sin 150^\circ} = \frac{|\overrightarrow{F_2}|}{\sin 120^\circ} = \frac{1000}{\sin 90^\circ}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{F_1}| = 500$ 即綫 BC 作用於 C 點之力 500 磅

$|\overrightarrow{F_2}| = 500\sqrt{3}$ 即綫 AC 作用於 C 點之力爲 $500\sqrt{3}$



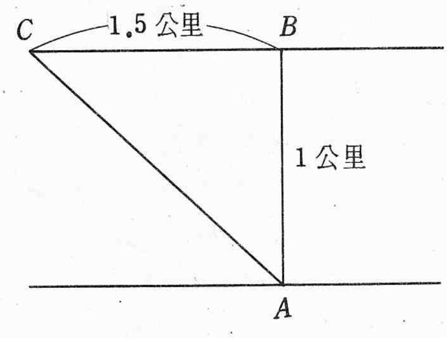
<辰> 如圖所示,$\overrightarrow{CB}$ 表水流向量;$\overrightarrow{AC}$ 表船行向量;$\overrightarrow{AB}$ 爲船速與水速之合向量

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$\therefore |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1.5)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{3.25}$ 公里



<巳> 設四切綫爲

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{a^2(-\frac{1}{m})^2 + b^2}$

$\Rightarrow mx - y \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} = 0$

$x + my \pm \sqrt{a^2 + b^2m} = 0$

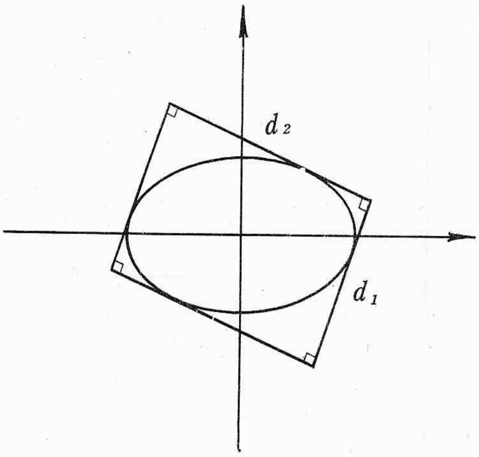
兩平行綫間之距離依次爲

$$d_1=\frac{2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$d_2=\frac{2\sqrt{a^2+b^2m^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

∴矩形面積

$$d_1d_2=\frac{4\sqrt{a^2m^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2m^2}}{m^2+1}$$



由算術平均≥幾何平均，知

$$\frac{1}{2}[(a^2m^2+b^2)+(a^2+b^2m^2)]$$

$$\geq\sqrt{(a^2m^2+b^2)(a^2+b^2m^2)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}(a^2+b^2)(m^2+1)$$

$$\geq\sqrt{(a^2m^2+b^2)(a^2+b^2m^2)}$$

$$\therefore\ \frac{4\sqrt{a^2m^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2m^2}}{m^2+1}$$

$$\leq 2(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow\ d_1d_2\leq 2(a^2+b^2)$$

又由歌西不等式

得　$(a^2m^2+b^2)(b^2m^2+a^2)$

$$\geq(abm^2+ab)^2$$

$$\Rightarrow\ d_1d_2\geq 4ab$$

<午>　$2c=$（遠）$-$（近）

$2a=$（遠）$+$（近）

$$\because\ e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{945-915}{945+915}$$

$$=\frac{30}{1860}=\frac{1}{62}$$

<未>　令 $Q(c,0)$，$R(-c,0)$ 如圖

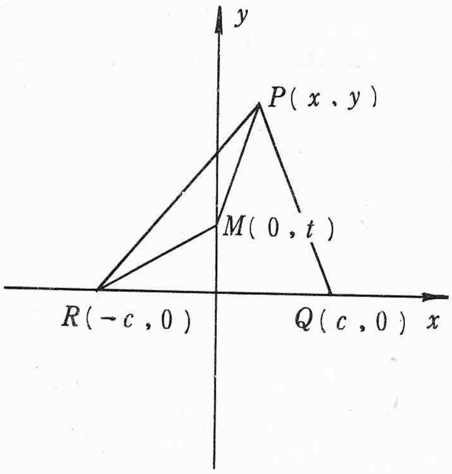
令 $P(x,y)\Rightarrow$ 重心 $G\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)$

又令外心 $M(0,t)$

$$\Rightarrow\ PM=MR\Rightarrow x^2+(y-t)^2$$

$$=c^2+t^2$$

$$\Rightarrow\ t=\frac{x^2+y^2-ct^2}{2y}$$



$$\because\ \frac{y}{3}=t=\frac{x^2+y^2-c^2}{2y}$$

$$\Rightarrow\ 2y^2=3x^2+3y^2-3c^2$$

$$\Rightarrow\ 3x^2+y^2=3c^2$$

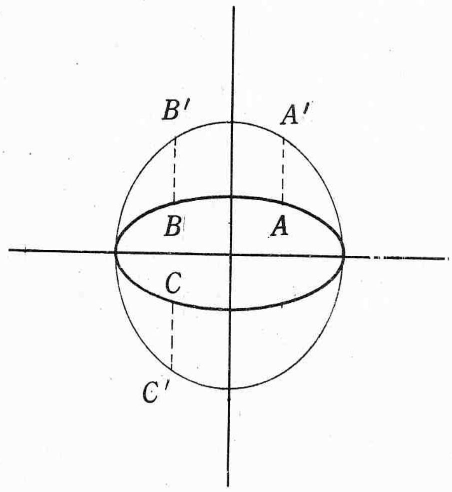
$$\Rightarrow\ \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1\qquad\because c>0$$

∴爲橢圓　∴ $a^2=3c^2$，$b^2=c^2$

$$\therefore\ e^2=1-\frac{b^2}{a_2}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ e=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

<申>　如圖，



令$A(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$,

$B(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$,

$C(a\cos\theta_3, b\sin\theta_3)$，並作$x$軸之垂綫，分別交圓於

$A'(a\cos\theta_1, a\sin\theta_1)$,

$B'(a\cos\theta_2, a\sin\theta_2)$,

$C'(a\cos\theta_3, a\sin\theta_3)$

$$\Rightarrow \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos\theta_1 & b\sin\theta_1 & \vdots \\ a\cos\theta_2 & b\sin\theta_2 & \vdots \\ a\cos\theta_3 & b\sin\theta_3 & \vdots \end{vmatrix}\right|}{\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos\theta_1 & a\sin\theta_1 & \vdots \\ a\cos\theta_2 & a\sin\theta_2 & \vdots \\ a\cos\theta_3 & a\sin\theta_3 & \vdots \end{vmatrix}\right|}$$

$$= \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \triangle ABC = \frac{b}{a}\triangle A'B'C'$$

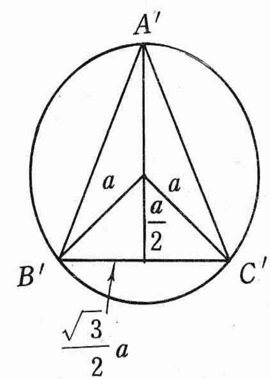
∴當$\triangle A'B'C'$面積最大時$\triangle ABC$亦最大

又　圓內接三角形之正△之面積最大

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}, (\sqrt{3}a)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

∴$\triangle ABC$之最大面積爲

$$\frac{b}{a} \times \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$



——本文作者現任教於台南新化高中