

週期函數與其應用

羅 添 壽

命題：1. 構想：配合高中學生程度，依高一、二、三課程，依次命題，以培養學生學習興趣。

2. 動機：由演練過程，熟悉基本的週期函數及其應用，使對已習之課程能融會貫通。

說明：1. 設函數 $f: A \rightarrow R, A \subset R$ ，“若 $\exists p$ (常數) 但 $p \neq 0$ ，使得 $f(x+p) = f(x)$ ，其中 $x+p \in A, \forall x \in R$ ”，則稱 f 為一週期函數，其中最小之正值 p ，即為 f 之週期。

2. 若 f 為週期函數，且週期為 p ，則 $f(x+np) = f(x), n \in Z$ 。

3. 圖形性質：每隔一週期，圖形、形狀均重複相同。

A. 函數與週期 (高一程度)

1. (單選) 設一函數 f ，具有如下之性質：

$$f(x+10) = f(x), \quad f(-x) = -f(x)$$

$$f(1/3) = -1,$$

則 $f(59/3)$ 之值等於

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 2 (E) 無意義

2. (單選) 函數 $f(x+3) = f(x)$ ，則

$$f(-2) = 1/2, \text{ 求 } f(1978) =$$

(A) 0 (B) 1 (C) $1/2$ (D) 2 (E) $1/3$

3. (週期函數之應用；多選) 設 $A = \{x \mid x \in R, x \neq 0, 1, -1\}$ ， $f: A \rightarrow R$ ，

$$f(x) = 1/(1-x), \quad a_0 = x,$$

$$f(a_n) = a_{n+1}, \quad n \in N \cup \{0\}, \text{ 則}$$

(A) f 為週期函數 (B) f 非週期函數

(C) f 之週期為 3 (D) f 之週期為 4 (E) f 無週期

4. (單選) 承上題求 $a_{1978} =$

(A) x (B) $1/(1-x)$ (C) $1/(1+x)$

(D) $(x-1)/x$ (E) $x/(x-1)$

5. (多選) 設 $f(x)$ 表 7^x 之個位數字， $x \in N$

則

(A) $f(1) = 7$ (B) f 為週期函數

(C) $f(11) = 9$ (D) $f(1978) = 9$

(E) $f(N) = \{1, 3, 7, 9\}$

6. (多選) 設 $3^7 = a_1, (a_1)^7 = a_2,$

$$(a_2)^7 = a_3, \dots, (a_{99})^7 = a_{100},$$

\dots ，以 A_i 表 a_i 之個位數， $i \in N$ ，則

(A) A_i 為週期函數 (B) $A_{25} = 3$ (C) $A_{100} = 3$

(D) $A_{1978} = 3$ (E) $A_{50} = 9$

7. (單選) 函數滿足下列條件

$$(1) \forall u, v \in R,$$

$$f(u) \times f(v) = f(u+v) + f(u-v)$$

$$(2) f(1) = 1,$$

則 f 之週期為

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

8. (單選) 設 $f(x), g(x)$ 均定義於 R 之週期函數，其週期分別為 p, k ，若

$$g(x) = f(x/2) \text{ 則}$$

(A) $p = k$ (B) $p = 2k$ (C) $p = 3k$

(D) $p = k/2$ (E) $p = k/3$

9. (單選) 設 $f(x), g(x)$ 均為定義於 R 之週期函數，其週期分別為 p, k ，若

$$g(x) = f(x+a), \quad a \text{ 表一常數，則 } p =$$

(A) k (B) $2k$ (C) $3k$ (D) $k/2$ (E) $k/3$

10. (單選) 設 $f(x), g(x)$ 均定義於 R 之週期函數，其週期分別為 p, k ，若

$$g(x) = f(px), \text{ 則 } k =$$

(A) 1 (B) 2 (C) $1/2$ (D) 3 (E) $1/3$

11. (單選) 設 $f(x), g(x)$ 均定義於 R 之週期函數，其週期分別為 p, k ，若

$$g(x) = f(a+px/n), \quad (a \text{ 表一常數})$$

則 $k =$

(A) n (B) $2n$ (C) $3n$ (D) $n/2$ (E) $n/3$

12. (單選) 設 f 為定義於 Z 之週期函數， x 為奇數時 $f(x) = 1$ ， x 為偶數時 $f(x) = 0$ ，則

f 之週期為

(A) 1 (B) $1/2$ (C) 2 (D) $1/3$ (E) $2/3$

B. 三角函數與週期 (高二程度)

13. (多選) 下列各函數之週期何者大於 π ?

(A) $2 \sin 3(x + \pi/4)$ (B) $\frac{1}{2} \cos(3^\circ x + 10^\circ)$

(C) $2 \tan((4x + \pi/2)/2)$

(D) $2 \sec(\pi x/6 - 10)$

(E) $\csc((x-1)/(7+\pi))/12$

14. (絕對值型之三角函數之週期; 多選) 下列各函數之週期何者大於 π ?

(A) $|\sin x|$ (B) $|2 \cos 3x|$

(C) $|\frac{1}{5} \tan(\frac{x+\pi}{5})|$

(D) $4 |\sec \frac{x+1}{3}|$ (E) $5 |\csc \frac{x+30^\circ}{5}|$

【提示】 由圖解之。

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x)| \text{ 之週期} = \text{原 } f(x) \text{ 週期} / 2, \text{ 其} \\ \text{中 } f \text{ 表三角函數 (限 } |\sin, \cos, \sec, \\ \csc) \\ |f'(x)| \text{ 之週期} = \text{原 } f'(x) \text{ 之週期,} \\ \text{其中 } f' \text{ 表 } \tan \text{ 或 } \cot \end{array} \right.$$

15. (多選) 請由圖解法求下列函數之週期何者小於 π ?

(A) $\sin |x|$ (B) $2 \cos |2x + \pi/3|$

(C) $3 \tan |3x|$ (D) $\frac{1}{3} \sec |x/3 - 30^\circ|$

(E) $\frac{1}{2} |\csc(\pi x/2)|$

【提示】 三角函數中, $|f(x)|$ 之週期與 $f(|x|)$ 之週期並不相同, 而後者求法須先去掉絕對值再分別討論。16. (高次型三角函數之週期; 多選) 下列何函數之週期等於 π ?

(A) $\cos^2 x$ (B) $\tan^3 x$

(C) $\cot^{15}(x+1/\pi)/5$ (D) $6 \sec^{16}|x|$

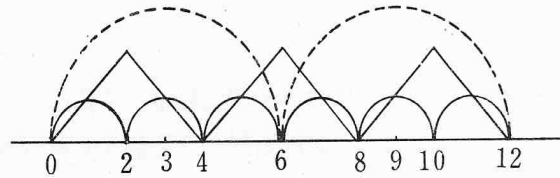
(E) $\csc^{17}(x+10^\circ)$

【提示】

(1) 設 m 為偶數, 則

① $f^m(x)$ 之週期 = 原 $f(x)$ 之週期 / 2
(此時 f 限為 \sin, \cos, \sec, \csc)

② $f^m(x)$ 之週期 = 原 $f(x)$ 之週期, 即不變, (f 為 \tan, \cot)

(2) 設 m 為奇數, 則 $f^m(x)$ 之週期 = 原 $f(x)$ 之週期 (此時 f 為任意三角函數)17. (合成三角函數 $f_1 + f_2$ 之週期; 多選) 下列何函數其週期大於 π ?

(A) $2 \sin 2x + 3 \cos 3x + 4$

(B) $\sqrt{2} \tan 4x - \sqrt{3} \cot 6x + 1$

(C) $\sin x + |\sin x|$

(D) $\tan^2 x - |\tan x| + 2$

(E) $\cos x + \sin(\sqrt{2}x)$

【提示】 設 f_1 與 f_2 均為週期函數其週期為 $p\pi$ 與 $q\pi$, 則 $f_1 + f_2$ 之週期為① $[p, q] \times \pi$, 當 $p, q \in \mathbb{Z}$, $[p, q]$ 表最小公倍數。② 化 $\begin{cases} p\pi = h^\circ \\ q\pi = k^\circ \end{cases}$ 週期為 $[h^\circ, k^\circ]$, 當 $p, q \in \mathbb{Q}$ 時。③ 當 $p, q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 且 $p \neq hq$ 或 $q \neq kp$, $k \in \mathbb{Z}$ 時, f 非週期函數。18. (特殊型之週期函數; 多選) 下列何函數, 其週期不小於 π ?

(A) $|\sin x| + |\cos x|$

(B) $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}$

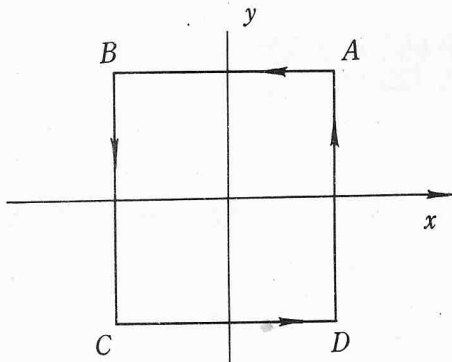
(C) $\frac{\pi + 100}{|\sin(x + 3^\circ)|}$

(D) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

(E) $|\sin x| - |\cos x|$

19. (解析幾何與週期函數; 單選) 下圖是一邊為 4 之正方形, $ABCD$ 其周上之點, $p(x, y)$ 由 A 點出發向左轉動, 設動點 p 從 A 出發後所行距離為 t , 則點 p 之縱坐標 y 是 t 之函數, 求該函數之週期

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 16 (E) 以上皆非



20. (複數 ω 之應用; 單選) 若 $x+1/x=1$, 求 $x^{1978}+1/x^{1978}$
 (A) 1 (B) -1 (C) $(-1+\sqrt{3}i)/2$ (D) $(1-\sqrt{3}i)/2$ (E) 2

C. 矩陣與週期函數 (高三程度)

21. (矩陣之乘法; 單選) 設

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{求 } M^{1978} =$$

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
 (E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

22. (矩陣之乘法; 多選) 令 $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, 則

- (A) A^n , $n \in N$ 為週期函數
 (B) A^n , $n \in N$ 非為週期函數
 (C) A^n 之週期為 2 (D) $A^{1978} = A$
 (E) $A^{1978} = A^2$

23. (矩陣與 De' Moivre's Thm; 多選) 設

$$A(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$n \in N$, 則

- (A) $A(1978) = A(1)$
 (B) $A(1978) = A(3)$
 (C) $A(n)$ 為週期函數, $n \in N$
 (D) $A(n)$, $n \in N$ 之週期為 3
 (E) $A(n)$, $n \in N$ 非週期函數

(本文作者現任教於台南縣新化高中)