資料類

莫斯科大學口試試題補遺

施拱星 朱建正

在1980年六月，美國數學學會出版的notices中，又補了兩題猶太問題，給黑五類做的。題目如下：

7. 令$\{x\}$表x的分數部分，求

$$\lim_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$$

8. 求證$(6+\sqrt{35})^{1979}$的十進位小數展開的小數點後連續一千位皆爲9。

第7題解法如下：

令$N_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$，

$\epsilon_n=(2-\sqrt{3})^n$

則$(2+\sqrt{3})^n=(N_n-1)+(1-\epsilon_n)$，

其中N_n爲整數，$0<\epsilon_n<1$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0$ $\therefore\{(2+\sqrt{3})^n\}=1-\epsilon_n$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}=1$

第8題與第7題有密切關係。

$(6+\sqrt{35})^n+(6-\sqrt{35})^n=N_n$爲正整數，且$0<\epsilon=6-\sqrt{35}<1$

從$(6+\sqrt{35})^n=(N_n-1)+(1-\epsilon^n)$得

$$\{(6+\sqrt{35})^n\}=1-\epsilon^n$$

因$\epsilon=\dfrac{1}{6+\sqrt{35}}<\dfrac{1}{6+5}<\dfrac{1}{10}$，

$$0<\epsilon^{1979}<\left(\frac{1}{10}\right)^{1979}<\frac{1}{10^{1000}}$$

$$\therefore\ 10^{1000}\cdot\{(6+\sqrt{35})^{1979}\}$$

$$=10^{1000}(1-\epsilon^{1979})$$

$$>10^{1000}\left(1-\frac{1}{10^{1000}}\right)$$

$$=10^{1000}-1=\underbrace{99\cdots\cdots9}_{1000\text{個}9}$$ 故得證。

又此次文復會的數學競試中考了$\sqrt[3]{60}$與$2+\sqrt[3]{7}$比大小的問題。在集思廣益之下，又得兩解法如下：

解(5)：

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)，$$

因$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$，

且等號僅當$a=b=c$時成立。

故$a+b+c$與$a^3+b^3+c^3-3abc$同號。

現令$a=2$，$b=\sqrt[3]{7}$，$c=-\sqrt[3]{60}$，易算得

$$a^3+b^3+c^3-3abc<0$$

故得 $2+\sqrt[3]{7}<\sqrt[3]{60}$。

解(6)：下面解法係黃振芳（現任台大數學系研究助理）提供。我以爲很可能就是原命題者的命題依據。但是因爲解法涉及比較高級的微積分概念，所以不一定是命題者心目中的高中程度解法。

因$\dfrac{d^2}{dx^2}x^{\frac{1}{3}}<0$，故$x^{\frac{1}{3}}$爲凹函數。

亦即具有 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geq\dfrac{1}{2}(f(a)+f(b))$

的性質。

現令 $a=56$，$b=64$

則 $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{64}\leq 2\sqrt[3]{60}$

即 $2\sqrt[3]{7}+4\leq 2\sqrt[3]{60}$ 消去2即得。

（本文作者現均任教於台大數學系）