分式型變換與圓的鏡射

何 景 國

一、這是一篇研究高中數學實驗教材的部份心得。

二、範圍是教本第四冊，第五章。

三、本文主旨是深入探討複數幾何中的「分式型線性變換」：

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

其中 a，b，c，d 是四個給定的複數，且滿足：$ad-bc \neq 0$

藉著複數平面上的幾何「搬動」觀點來解說圓的鏡射這種變換的許多重要結論。最後再將分式型變換帶進一個特殊線形群 $SL(2,C)$ 裏去，以了解其代數結構及其表示法。

上述定義中附帶條件：$ad-bc\neq 0$，僅是不希望 $W=T(z)$ 退化成爲常數函數。

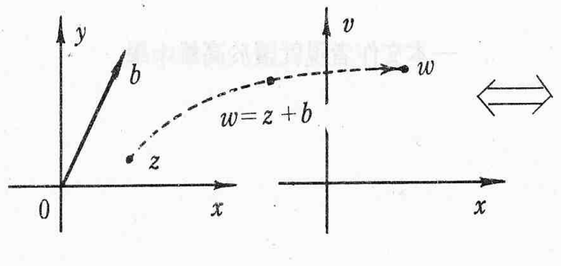
我們在複數平面上引進新的點，稱做「無窮遠點」，並以符號「∞」來表示。新得到的平面叫做「廣義複數平面」且記爲 $C^* = C \cup \{\infty\}$。故分式型變換 $W=T(z)$ 就能夠將廣義複數平面映成其本身的映射，若 $C=0$，則 $T(\infty)=\infty$；若 $C\neq 0$，則 $T\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$ ，$T(\infty)=\frac{a}{c}$

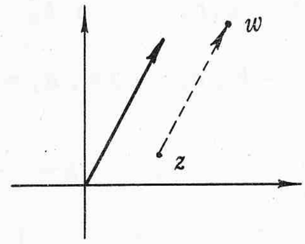
I 基本分式型變換

首先讓我們觀察下面的三個例子：

1. **變換 $w=T(z)=z+b$** （其中：$b\in C$）

這是一個平移變換，“若 $b=0$ 則 $W=Z$” 是恒等變換了。平移變換可以看成是在搬動向量；同時由於複數的加法相當於向量的加法，所以變換 $W=z+b$ 就是順着向量 b 方向的平移。而無窮點 ∞ 則對應到它自己。





2. **變換 $w=T(z)=az$** （其中：$a\neq 0$）

依 a 之值分爲三種情形討論：

(i) 當 $a\in R$ 且 $a>0$ 時：

這是一個伸縮變換，即，當 $a>1$ 時，它是放大；而當 $a<1$ 時它是縮小。

(ii) 當 $a\in C$ 且 $a=\cos\theta+i\sin\theta$ 時：

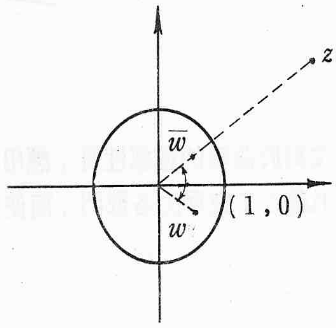
在這種情形，變換 $w=az$ 表示是以 θ 角的旋轉，（即是一個以原點爲中心，作 θ 角旋轉的定心剛性運動。）

(iii) 當 $a\in C$ 且 $a=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$ 時：

這種情形就是上述兩種變換之合併，也就是一個以原點爲中心，做角度爲 θ 的旋轉運動之後，再加以放大或縮小 γ 倍的映射。

3. 變換 $w=T(z)=\frac{1}{z}$ （其中 $z\neq 0$）

設 $z=\gamma e^{i\theta}$ 則 $w=\frac{1}{\gamma}e^{-i\theta}$，$\overline{w}=\frac{1}{\gamma}e^{i\theta}$，故兩點 w、$\overline{w}$ 是關於實軸互爲對稱的，同時，$\overline{w}$ 與 z 是關於單位圓互爲對稱的。這個變換將原點對應到無窮遠點；反之，把無窮遠點對應回來原點。



上面所說的變換，通常我們稱爲「基本分式型變換」，這是因爲我們可以證明下列的定理：

「任意的一分式型變換皆可以用幾個基本分式

型變換之合成」。

證明：

設給予的分式型變換 T 爲

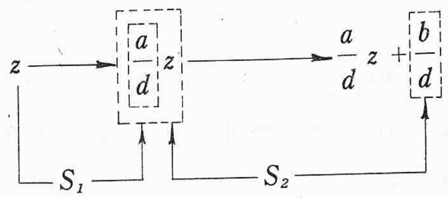
$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad(\text{其中 } ad-bc\neq 0)$$

分兩種情形證明：

(1)　當 $c=0$ 時　則：

$$T(z)=\frac{az+b}{d}=\frac{az}{d}+\frac{b}{d}$$

即變換 T 可由下列兩個基本分式型變換而得



故

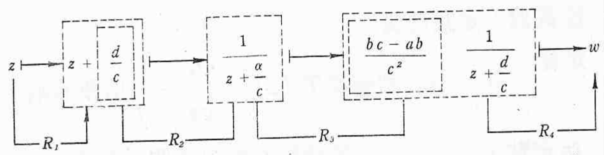
$$T=S_2\circ S_1$$

其中 S_1 表第二類變換；S_2 表第一類變換。

(2)　當 $c\neq 0$ 時　則：

$$T(z)=\frac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}}=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$$

即變換 T 可由下列四個基本分式型變換而得



故

$$T=R_4\circ R_3\circ R_2\circ R_1$$

其中 R_1，R_4 表第一類變換；R_2 表第三類變換；R_3 表第二類變換。

Ⅱ分式型變換的重要性質

現在將分式型變換寫成另一種形式。

設分式型變換 $T(z)=\dfrac{az+b}{az+d}$ $(aa-bc\neq 0)$ 則

對 α，$\beta\neq\dfrac{-d}{c}$，α、$\beta\neq\infty$ 而言，得

$$w_1=T(\alpha)=\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$$

及

$$w_2=T(\beta)=\frac{a\beta+b}{c\beta+d}$$

$$\Rightarrow\ \frac{w-w_1}{w-w_2}=\left(\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right)\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)$$

其中　$w=T(z)$

或

$$\boxed{\frac{w-T(\alpha)}{w-T(\beta)}=\mu\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$$

其中　$\mu=\dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}$　且 $\mu\neq 0$

上面已經證明了一個定理如下：

「設變換 T

$$T(z)=w=\frac{az+b}{cz+d}$$

若 α，$\beta\in C$，且 α，$\beta\neq-\dfrac{d}{c}$；α，$\beta\neq\infty$ 則必有一非零複數 μ，使得下式成立

$$\frac{w-T(\alpha)}{w-T(\beta)}=\mu\frac{z-\alpha}{z-\beta}\ ,\ (z\in C^*)$$

重要性質

性質一：保角性質

設點 z_0 爲兩平滑曲線 Γ_1，Γ_2 的交點，在 z_0 兩曲線之交角爲 θ，若分式變換 T 分別將曲線 Γ_1、Γ_2 映射到 $T(\Gamma_1)$、$T(\Gamma_2)$，則兩曲線 $T(\Gamma_1)$ 與 $T(\Gamma_2)$ 的交於點 w_0、$w_0=T(z_0)$。同時，其交角等於角 θ

證明：

設變換 T 定義如下

$$T(z)=w=\frac{az+b}{cz+d}\quad(\text{其中 } ad-bc\neq 0)$$

在曲線 Γ_1 與 Γ_2 上分別取兩點 z_1、z_2 而且

$$T(z_1)=w_1\ ,\qquad T(z_2)=w_2$$

因爲：

$$\theta=\lim_{z_1,z_2\to z_0}\ Arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$$

（$\lim\limits_{z_1,z_2\to z_0}$ 是沿曲線 Γ_1，Γ_2 取極限值的）

設曲線 $T(\Gamma_1)$ 與 $T(\Gamma_2)$ 的夾角爲 φ，則

$$\varphi=\lim_{\substack{w_1\\ w_2}\to w_0} Arg\frac{w_2-w_0}{w_1-w_0}$$

由上述定理得

存在$\mu\in C-\{0\}$，使得$\dfrac{w_2-w_0}{w_1-w_0}=\mu\dfrac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$

故

$$\varphi=\ell im(\ Arg\ \mu\ )+\ell im\,Arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$$

但

$$\ell im\,Arg\ \mu=\ell im\,Arg\frac{cz_1+d}{cz_2+d}=0$$

即

$$\varphi=\ell im\ Arg\ \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\theta$$

一般來說，凡是複數平面上的變換具有這樣性質都叫做保角變換。所以，一個分式型變換是保角變換。

性質二：保比性質

這裡所說的比是指「複比」。

對於四個廣義複數z_1、z_2、z_3、z_4，若存在$\left(\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right):\left(\dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\right)$稱為是$z_1$、$z_2$、$z_3$、$z_4$的一個複比；並記為：$(z_1,z_2;z_3,z_4)$

若某一複數　$z_K=\infty$（其中R可為1，2，3，4）則將上式子右端適當地除以z_K後，再令$\dfrac{1}{z_K}=0$，然後計算其值。

譬如說，當$z_1=\infty$，則複比計算如下：

$$(\infty,z_2;z_3,z_4)=\left(\frac{1-\dfrac{z_3}{z_1}}{z_2-z_3}\right):\left(\frac{1-\dfrac{z_4}{z_1}}{z_2-z_4}\right)=\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$$

定理：

「複比在分式型變換下是不變的。」

即

設T為分式變換則$(T(z_1),T(z_2);T(z_3),T(z_4))=(z_1,z_2;z_3,z_4)$

證明：

因為T是分式型變換，由定理得

存在$\mu\in C-\{0\}$使得$\dfrac{w-T(z_1)}{w-T(z_2)}=\mu\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$

特取$T(z_3)=w$則上式為：

$$\frac{T(z_3)-T(z_1)}{T(z_3)-T(z_2)}=\mu\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{w-T(z_1)}{w-T(z_2)}\right):\left(\frac{T(z_3)-T(z_1)}{T(z_3)-T(z_2)}\right)$$

$$=\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right):\left(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right)$$

再取$T(z_4)=W$則可得：

$$(T(z_1),T(z_2);T(z_3),T(z_4))$$
$$=(z_1,z_2,z_3,z_4)$$

性質三：保圓性質

定理：　複數平面上，圓在分式型變換下的像仍然為圓。

這裡所說的圓包括直線。因為直線可以看成圓心在無限遠處，半徑無窮大的圓，所以直線就是圓的一種特異情形。

證明：

設T為分式型變換且w_2，w_3，w_4分別為圓C的三相異點z_2，z_3，z_4的像　即

$$w_2=T(z_2);w_3=T(z_3);w_4=T(z_4)$$

$z\in C\Leftrightarrow(z_1,z_2;z_3,z_4)=\lambda$（其中$\lambda\in R$）

設$T(z)=w$則由保比性質得

$$(w,w_2;w_3,w_4)=\lambda$$

這說明了點w在三相當點w_2，w_3，w_4所決定的圓上。

故，定理得證

性質四：定點性質

定理：　任一分式型變換$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$頂多有兩個定點τ_1，τ_2（恒等變換有無限多個定點）。

結論有如下表所列

設$\delta=(a+d)^2-4(ad-bc)$且τ_1，τ_2分別為T的定點。

則：

$c=0$
(1)當$a\neq d$時；$\tau_1=\dfrac{b}{d-a}$；$\tau_2=\infty$
(2)當$a=d$時；τ_1，$\tau_2=\infty$
$c\neq 0$
(1)當$\delta\neq0$時；$\tau_1,\tau_2=\dfrac{a-d\pm\sqrt{\delta}}{2c}$
(2)當$\delta=0$時；$\tau_1,\tau_2=\dfrac{a-d}{2c}$

證明：

變換T的定點就是滿足方程式$T(z)=z$的點

若點z為定點則z滿足下列之方程式：

$$cz^2+(d+a)z-b=0$$

按代數基本定理知上述方程式有兩解τ_1，τ_2

討論：

1. 當$c=0$時，有一解$z=\infty$及另一解為

$$z=\begin{cases}\dfrac{b}{d-a} & (\text{當 } a\neq d)\\ \infty & (\text{當 } a=d)\end{cases}$$

2. 當$c\neq 0$時，必有兩個解。

換句話說，若包括無限大解∞在內，方程式恒有兩解

$$\tau_1,\ \tau_2=\frac{a-d\pm\sqrt{\delta}}{2c}$$

（其中 $\delta=(a+d)^2-4(ad-bc)$）

性質五： 設T、S分別為兩個分式型變換則$T=S$的充要條件是：

對任意三個相異點z_K，$T(z_K)=S(z_K)$

（其中$k=1,2,3$）

證明：

設 $T(z_K)=S(z_K)=W_K$ $(k=1,2,3)$

$\Rightarrow$ $S^{-1}(W_K)=z_K$

故

$$S^{-1}(T(z_K))=z_K$$

因為分式變換至多僅有兩個重點所以

$S^{-1}\circ T=\Lambda$ （Λ表恒等變換）

$\Rightarrow$ $T\cong S$

Ⅲ基本分式型變換與圓的鏡射

這裡我們來定義平面上兩點z和z^*對於直線或圓Γ對稱的意義：

兩點z，z^*對於直線或圓Γ對稱，就是指一映射$\pounds$把Γ映成實數綫R去，而且滿足下列關係式：

$$\pounds(z)=\overline{\pounds(z^*)}$$

引理

設z，z^*對於所給的直線或圓Γ對稱，T為任一個分式型變換則兩點$T(z)$、$T(z^*)$是關於$T(\Gamma)$的對稱點。

證明：

依題意知：

$\pounds:\Gamma\longrightarrow R$使得 $\pounds(z)=\overline{\pounds(z^*)}$

因為Γ為已予的直線或圓，故$T(\Gamma)$亦為一直線或圓。

設S為一將$T(\Gamma)$映成實數綫R之變換

則

$S\circ T:\Gamma\rightarrow R$滿足

$$S(T(z))=\overline{S(T(z^*))}$$

$\Rightarrow$ $T(z)=T(z^*)$

故 $T(z)$、$T(z^*)$是關於$T(\Gamma)$的對稱點。

定理： 設Γ為一單位圓，若w，w^*為關於Γ的對稱點，則$W^*=\dfrac{1}{\bar{w}}$

證明：

考慮一分式型變換T定義如下：

$$w=T(z)=\frac{z-i}{z+i}$$

及

$$w\in C\text{且}\ |w|=1$$

則

$$T(-1)=i\ ;\ T(0)=-1\ ;\ T(1)=-i$$

變換T將z一平面上實數軸映射到W一平面上單位圓Γ上。

再由於

$$T(-z)=\frac{1}{\overline{T(z)}}$$

及

$$z=T^{-1}(w)=\frac{-i(w+1)}{w-1}$$

所以

$$\overline{T^{-1}(\bar{w})}=-T^{-1}(w)$$

$$\Rightarrow\ W^*=T(\overline{T^{-1}(w)})=T(-T^{-1}(\bar{w}))=\frac{1}{\bar{w}}$$

定理： 設Γ為複數平面上，以點z_0為圓心；γ為其半徑的圓。若點z，z^*為關於Γ對稱則有關係式：

$$z^*=z_0+\frac{\gamma^2}{\bar{z}-\bar{z}_0}$$

證明：

考慮一分式型變換T定義如下：

$$T(z)=\frac{z-z_0}{\gamma}$$

則

$$(T(z))^* = T(z^*) \qquad (\text{由引理})$$

$$\Rightarrow \quad T(z^*) = \frac{\gamma}{\bar z - \bar z_0} \qquad (\text{由上定理})$$

兩端作一反函數得：

$$z^* = \frac{\gamma^2}{\bar z - \bar z_0} + z_0$$

重要性質：

1 .對稱映射與圓的鏡射關係：

平面上任一個對稱映射皆可以化爲3個圓的鏡射的合成。

證明：

設點 $f(p)$ 爲點 P 關於直線 $L：X = \frac{1}{2}$ 而對稱之像點，則

$$f(p) = p' = 1 - \bar z$$

日

$$p \xrightarrow[\text{對圓}\Gamma_1:\ |z|=1]{\text{圓的鏡射}} p_1(z_1) \xrightarrow[\text{對圓}\Gamma_2:\ |z-1|=1]{\text{圓的鏡射}} p_2(z'') \xrightarrow[\text{對圓}\Gamma_2:\ |z|=1]{\text{圓的鏡射}} p_3(z''')$$

其中 $z' = \frac{1}{z}$

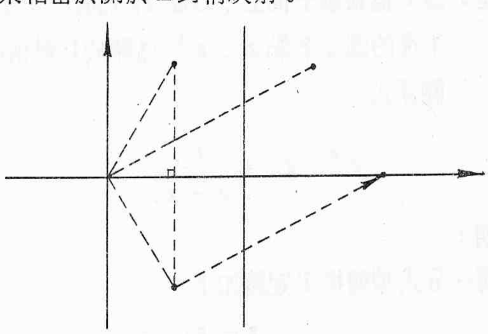
$$z'' = 1 + \frac{1}{\overline{z'} - 1} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{1}{1 - z}$$

$$z''' = \frac{1}{\overline{z''}} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{\overline{1-\bar z}}}} = \overline{1 - z} = 1 - \bar z$$

故

$$P_3 = P'$$

這就是說將點 P 經過三個圓的鏡射合成映射之後，結果相當於關於 L 對稱映射。



2．平移映射與圓的鏡射關係：

定理①： 平面上任一個平移映射均可以化爲2個對稱映射之合成。

證明：

設 f,g 分別爲以兩平行直線 L_1 與 L_2 的對稱映射，則

$$f：P \longrightarrow P_1 \text{ 滿足 } \overrightarrow{OP_1} = 2\,\overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP}$$
$$(\text{其中 } Q_1 = Proj_{L_1}P)$$

及

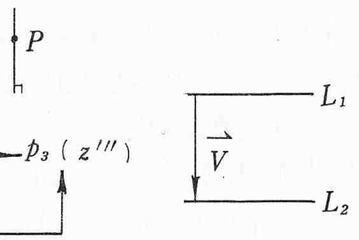
$$g：P_1 \rightarrow P' \text{ 滿足 } \overrightarrow{OP'} = 2\,\overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OP_1}$$
$$(\text{其中 } Q_2 = Proj_{L_2}\ P)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OP'} = 2\,\overrightarrow{OQ_2} - 2\,\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OP}$$

即 $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\,\overrightarrow{Q_1Q_2}$

或 $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\,\vec V$ （其中 $\vec V = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ ）

這就是說將點 P 經二個對稱映射合成之後結果相當於將點 P 對向量 $2\,\vec V$ 作平移映射。



定理(2)： 平面上任一個平移映射可以化爲6個圓的鏡射之合成。

證明：

因爲任一個平移可以化成二個直線的鏡射之合成所以任一平移均可以化爲六個圓的鏡射之合成。

3．對X一軸之鏡射與圓的鏡射關係：

定理： 基本分式型變換 $R：z \longmapsto \frac{1}{z}$ 可以看成是4個圓的鏡射之合成

證明：

因爲

$$z \xrightarrow[\text{對圓}\Gamma_1:\ |z|=1]{\text{圓的鏡射}} \frac{1}{\bar z} \xrightarrow{x-\text{軸之鏡射}} \frac{1}{z}$$

所以

$$R(z) = \frac{1}{z} \text{ 是由 } 1 + 3 = 4 \text{ 個圓的鏡射之合成}$$

4．伸縮變換與圓的鏡射之關係

定理(1： 基本分式型變換 $f：z \longrightarrow \gamma z$ 可以看成

是 2 個圓的鏡射之合成。

（其中 $\gamma=\dfrac{m}{n}$，m，$n\in R^{+}$ ）

證明：

因爲

$$z \xmapsto[\text{對圓}\Gamma_1\ |z|=\sqrt{m}]{\text{圓的鏡射}} \frac{n}{z} \xmapsto[\text{對圓}\Gamma_2\ |z|=\sqrt{m}]{\text{圓的鏡射}} \frac{m}{\left(\frac{n}{z}\right)}=\gamma z$$

所以，$f(z)=\gamma z$ 爲由 2 個圓的鏡射之合成。

定理②： 基本分式型變換 $f:z\longrightarrow e^{i\theta}z$ 可以看成二個圓的鏡射之合成。

證明： 設 S 表以斜角爲 $\dfrac{\theta}{2}$ 的對稱映射及 T 表以斜角爲 $\dfrac{\varphi}{2}$ 的對稱映射。　則

$$[\delta]=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$[T]=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

故：$[S\circ T]=\begin{pmatrix}\cos(\theta-\varphi) & \sin(\theta-\varphi)\\ -\sin(\theta-\varphi) & \cos(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$

＝以轉角爲（ $\theta-\varphi$ ）的旋轉映射

5．基本分式變換 $g:z\rightarrow re^{i\theta}z$ 與圓鏡射之關係：

定理： 基本分式型變換 $g:z\longrightarrow\gamma e^{i\theta}z$ 均可看成是 8 個圓的鏡射之合成（其中 $\gamma\in R^{+}$ ）

證明：

因爲

變換 $g(z)=\gamma e^{i\theta}z=e^{i\theta}(\gamma z)$

即：變換 g＝伸縮變換與旋轉之合成。

所以

變換 g 可以化爲 8 個圓的鏡射之合成。

重要結論：

「分式型變換 T 可以視爲 16 個圓的鏡射之合成。若變換 T

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

中之四個複數 a，b，c，d，如果有一爲零，則變換 T，化成圓的鏡射之個數必不足 16 的偶數。」

6．阿氏圓與分式型變換的關係

定理1：

設 C 爲兩基點 A、B 的阿氏圓，則兩點 A、B 必互爲關於圓 C 的鏡射之像點。

證明：

設 $C\cap\overleftrightarrow{AB}=\{C, D\}$ 與圓 ε 的半徑爲 γ，

則

ε 的圓心 0 落在 CD 的中點上

又因爲

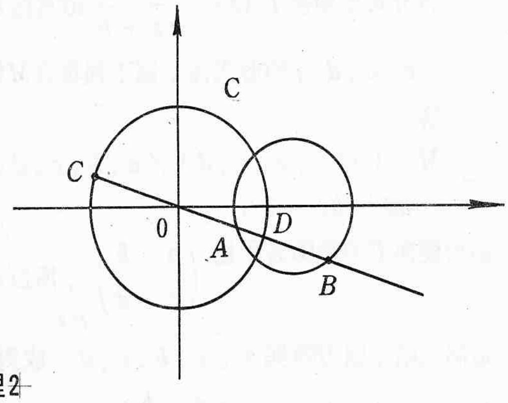
$A,B;C,D$ 成一調和點列

所以

$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\gamma^{2}$　（牛頓公式）

$$\overrightarrow{OA}=\frac{\gamma^{2}}{\overline{OB}^{2}}\overrightarrow{OB}$$

故，適當選定座標系（即可選定點 0 爲原點）可得兩點 A、B 成爲關於圓 C 互爲鏡像點。



定理2

設點 z_1，z_2 爲關於圓 Γ 的鏡像點，則在分式型變換 T 之下，點 $T(z_1)$、$T(z_2)$ 定爲關於圓 $T(\Gamma)$ 的鏡像點

證明：

考慮　$\Gamma=\left\{z\ \middle|\ \dfrac{z-z_1}{z-z_2}=k,\ k\text{ 比例常數}\right\}$

設　$w=T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$　（ $ad-bc\neq0$ ）

則

$$z=T^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}$$

且圓 $T(\Gamma)$ 的方程式爲：

$$\left|\frac{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-z_1}{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-z_2}\right|=k$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{-w(cz_1+d)+az_1+b}{-w(cz_2+d)+az_2+b}\right|=k$$

上式兩端乘以係數 $\left|\dfrac{cz_2+d}{cz_1+d}\right|$ 後，再整理可得

$$\left|\frac{w-w_1}{w-w_2}\right|=k\left|\frac{cz_2+d}{cz_1+d}\right|$$

（其中$w_1=T(z_1)$；$w_2=T(z_2)$）

故

w_1與w_2爲關於圓$T(\Gamma)$的鏡像點

Ⅳ 分式型變換的代數結構

分二段來說明如何將分式型變換帶入特殊線形群$SL(2,C)$。

一、將分式型變換$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+b}$改寫爲$\delta(a,b,c,d)$的形式後，則下列集合M構成一群。

$M=\{\sigma(a,b,c,d)/a,b,c,d\in C,\ ad-bc\neq 0\}$

由於變換T的矩陣表示爲$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}_{2\times 2}$，所以可以將這個二階正則方陣與$\sigma(a,b,c,d)$成對應。

設$GL(2,C)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} a,b,c,d\in C,\ ad-bc\neq 0\right\}$

及

一對應Ψ定義如下：

$$\Psi:\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\longrightarrow\delta(a,b,c,d)$$

例如，這個對應Ψ是單值，那麼很容易就能將分式型變換群M帶到一般線形群$GL(2,C)$去。

二、在這裡，我們轉移到另一種較簡單的表示式來考慮。

因爲

$$\forall\sigma(a,b,c,d)\in M,$$

$$\sigma(a,b,c,d)=\sigma\left(\frac{a}{\sqrt{D}},\frac{b}{\sqrt{D}},\frac{c}{\sqrt{D}},\frac{d}{\sqrt{D}}\right)$$

（其中$D=ad-bc\neq 0$而$\sqrt{D}$爲$ad-bc$的一個平方根）

且

$$\frac{a}{\sqrt{D}}\cdot\frac{b}{\sqrt{D}}-\frac{c}{\sqrt{D}}\cdot\frac{d}{\sqrt{D}}=\frac{ad-bc}{ad-bc}=1$$

$$SL(2,C)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle|\ ad-bc=1\right\}$$

再定義一個從$SL(2,C)$映至M的一個映射ξ，

$$\xi:\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\rightarrow\sigma(a,b,c,d)$$

則由於這個映射ξ爲一蓋射且滿足

$$\xi\left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\sigma(a_2a_1+b_2c_1,\ a_2b_1+b_2d_1,\ c_2a_1+d_2c_1,\ c_2b_1+d_2d_1)$$

即

$$\xi\left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\xi\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\cdot\xi\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$$

故ξ是群的同態映射

故ξ的零核$Ker\ \xi=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$

故下式就是變換群M的一種表示，

$$M\cong SL(2,C)/Ker\ \xi$$

——本文作者現任教於延平中學