坐標軸運算之介說

賴敦生

壹、前　　言

高中數學課程中，對方程式圖形的描繪法，其教學的方式是先用代數演算把方程式中之解（x，y）（以 $f(x, y)=0$ 而論）逐一求出，再在坐標平面上描點，然後聚集點列而得到圖形。如果方程式稍微複雜，就將方程式化爲各式圖案的標準式，然後用平移，旋轉的道理繪製圖形。這是傳統的教學模式，不過將坐標軸加以運算，並可以達到教學的目標。尚有代用坐標軸的比喻，可以輕鬆的明析最大、最小值。

本文就是介說坐標軸如何運算，特別是將原來靜態的坐標系統改述爲動態的坐標位置觀念來描繪，將可使教學達到相當高程度的效果。七年來曾經對建中日間、夜間、補校及其他各種程度學校所可能接觸到的學生試探教學，皆能使學生全盤了解，並產生濃烈的學習“信心”及“興趣”，今將此項教學法述之於後。

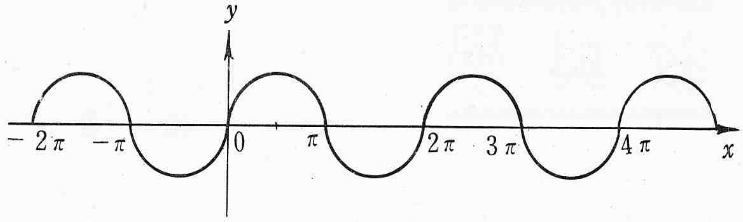
貳、三角函數圖形

高二上學生初學三角函數，因爲坐標軸平移，旋轉的概念尚未建立，（高二下期才有）可是教材的內容已經迫得非使用平移、旋轉的概念不可，就這樣教學產生了困頓，學生的學習情緒也就不舒暢。我且分段的陳述如何解除這種阻力。

我們假設 6 個三角函數的基本圖案已由傳統的教學法描點式推出之，其他週期函數的意義也已經熟悉，並只對正弦函數圖形申論之，其餘的函數可以順此類推、省略。

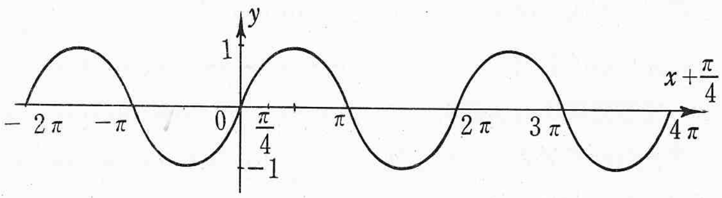
＜說明＞ $y=\sin x$ 之圖形爲：

1. 我們注意 x 軸的說法，是方程式 $y=0$ 之圖形，y 軸是方程式 $x=0$ 之圖形。

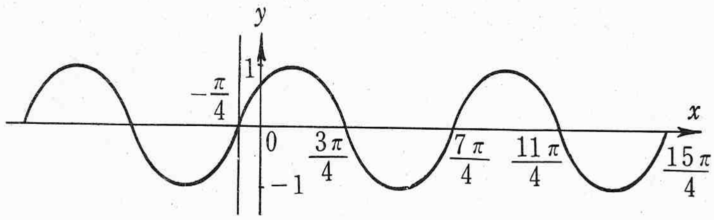


圖一

2. 當方程式是 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 時，我們不再稱呼變元 x 、y 爲 x 軸、y 軸之坐標，而改以 $x+\frac{\pi}{4}$ 、y 爲單位計量，即稱爲 $x+\frac{\pi}{4}$ 軸、y 軸，意思是就“ $x+\frac{\pi}{4}$ “與“ y ”之關係先行描圖：以後再改爲 x 與 y 間之關係描繪，其方法是就右圖所列坐標（ x 軸上的）各減去 $\frac{\pi}{4}$ 而後得圖三。我們不難看出圖三的 y 軸是（圖二）在 $x=\frac{\pi}{4}$ 處。我們亦知道除掉坐標位置不同外，（圖二）、（圖三）的圖形是全等形，高度、低度亦是一樣在 $-1\leq y\leq 1$ 的區間。



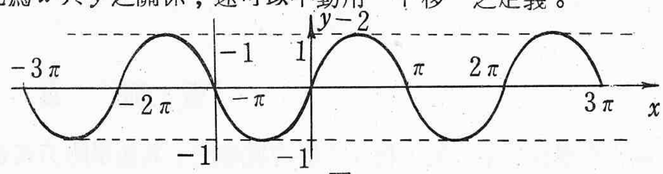
圖二



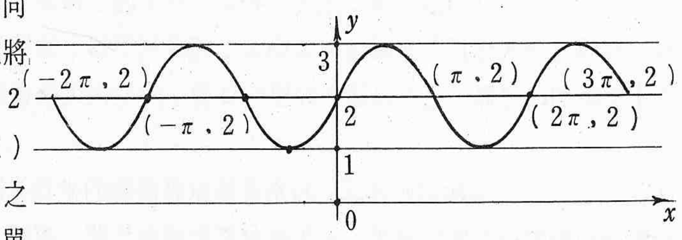
圖三

※至此強調：$x+\frac{\pi}{4}$ 與 y 之關係轉化爲 x 與 y 之關係，還可以不動用“平移”之定義。

3. 當然 $y=\sin x+2$ 的情形則先化爲 $y-2=\sin x$ ，而就 $y-2$ 與 x 進行繪圖如（圖四），這圖形還是和 $y=\sin x$ 的原始圖形全等，所不同的它的 y 軸是 $y-2$ 軸，我們現在將 $y-2$ 軸改名爲 y 軸，意思是 $y-2$ 軸上的縱標增加 2 單位而得（圖五），其高度、低度是介於 $1\leq y\leq 3$ 之區間，新 x 軸較（圖四）中降低二單位。

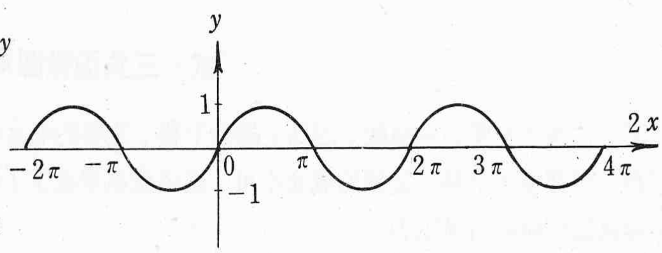


圖四

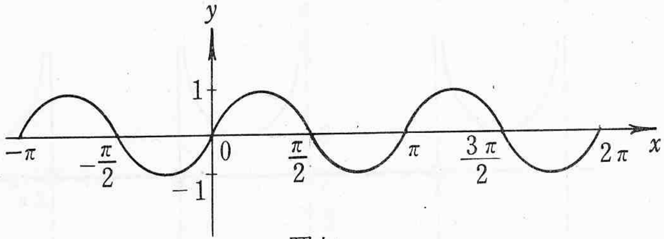


圖五

4. 倍角函數的情形一樣亦可製取：像 $y=\sin 2x$ 中之圖形仍然以 $2x$ 和 y 之關係先行作圖，其形狀還是與 $y=\sin x$ 一樣，（圖六），今我們要將 $2x$ 與 y 之關係改爲 x 與 y 的關係就是將（圖六）中之 $2x$ 軸之坐標一律除以 2 得 x 坐標，所得圖形爲（圖七）。此圖形與眞確的 $y=\sin 2x$

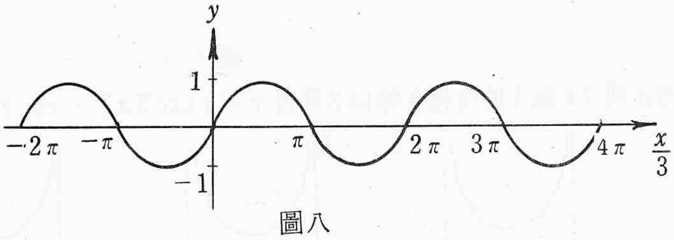


圖六



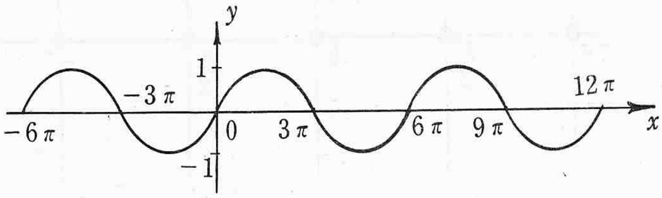
圖七

並未全等，原因是“ x 軸上的單位長度不一樣”，不過就教學立場而言，我們是給學生一種“概略”的形像，而不在乎精確的標定，數學教學是要引發興趣，死板的論調使學生窒息，此種說法合情合理。尤其上列說法恰好解說了週期函數之週期變化，不用定義 $f(x+p)=f(x)$ 而可精明的指出為 π 。



圖八

5. 又如多分角的狀況：$y=\sin\frac{x}{3}$ 中，就 $\frac{x}{3}$ 與 y 之關係繪圖得（圖八），再就 $\frac{x}{3}$ 軸之坐標一律乘以 3 以換得 x 與 y 之實際關係（圖九）週期很明顯的標示為 6π 。

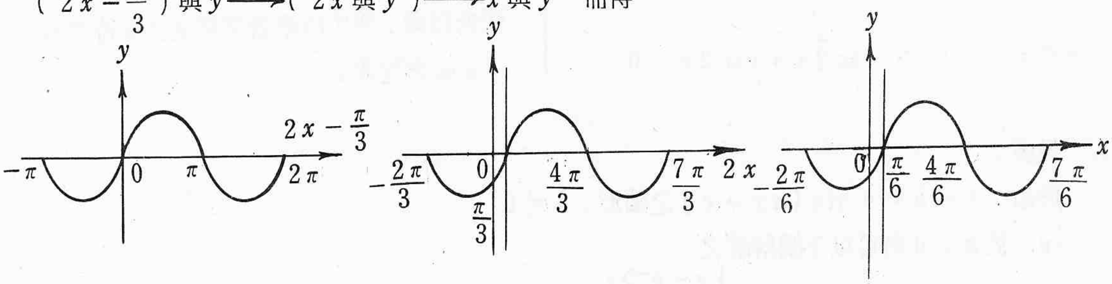


圖九

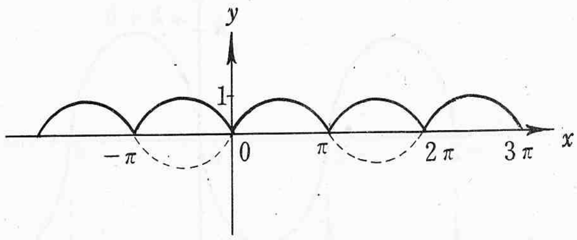
6. 複角函數 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

雖是構造複雜，但仍可依照步驟如次作圖：

$\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 與 $y \xrightarrow{\text{轉化}} (2x$ 與 $y) \xrightarrow{\text{轉化}} x$ 與 y　而得



7. 絕對值函數圖形對高中生尤為頭痛，數學的解說可用這種說法：如：$y=|\sin x|$ 的圖形是將 x 軸下方的圖形依照原來圖形的大小翻至上方。



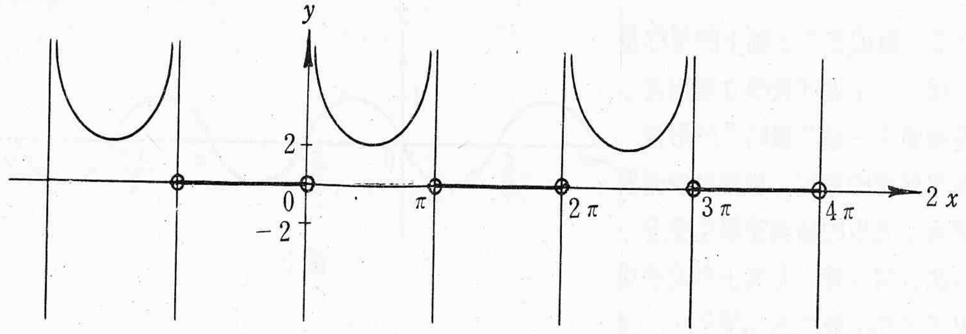
現在我們來討論這種圖形

$y=|\csc 2x|+\csc 2x$ 之圖形，數學的困頓是講解不易，下列講法是節略而有效！我們深知：

$0<2x<\pi$ 時　　$y=\csc 2x+\csc 2x=2\csc 2x$

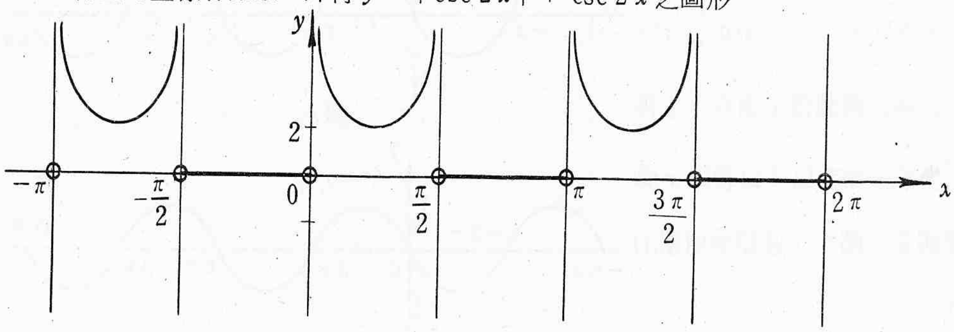
$\pi<2x<2\pi$ 時　　$y=-\csc 2x+\csc 2x=0$

那麼繪圖時先畫 $2x$ 與 y 之關係，其在 $(0,\pi)$，$(2\pi,3\pi)$，$(4\pi,5\pi)$，……區間取 $y=2\csc 2x$ 之圖形，而在 $(\pi,2\pi)$，$(3\pi,4\pi)$，$(5\pi,6\pi)$……間取 $y=0$ 之圖形，如：（圖十一）



圖十一

再次將 $2x$ 軸上的坐標各除以 2 即得 $y=|\csc 2x|+\csc 2x$ 之圖形



圖十三

註：一般的教學是一開始就得作 x 與 y 關係的圖形，而 x 之範圍必須逐段書出如：

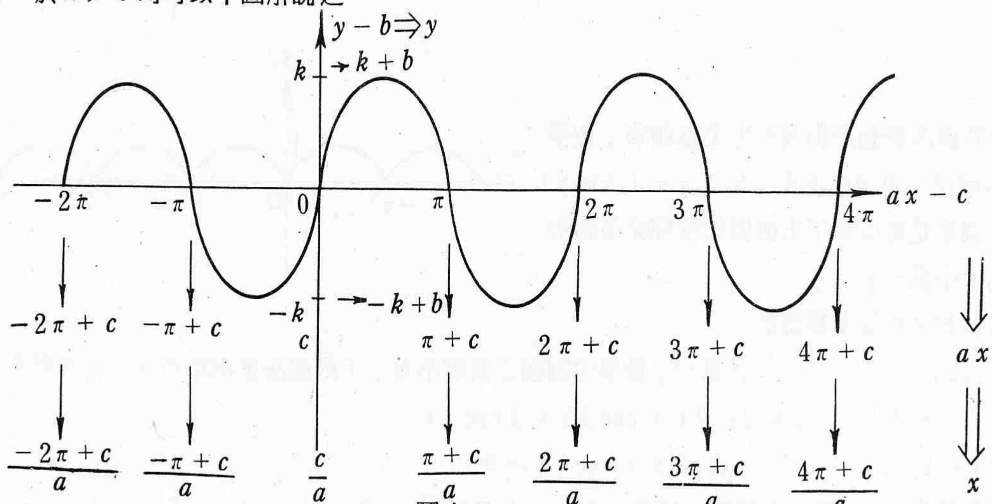
$$\left.\begin{array}{ll} 0<x<\frac{\pi}{2} & y=\csc 2x+\csc 2x=2\csc 2x \\ \frac{\pi}{2}<x<\pi & y=-\csc 2x+\csc 2x=0 \end{array}\right\}$$

然後依照傳統描圖法講解之，過程漫長，而無頭緒，學生的學習情緒無法保持高昂，是必然現象。

8. 推廣：

形如：$y-b=k\sin(ax-c)$ 之圖形，$a\neq 0$

(i) 於 $k>0$ 時可以下圖解說之



圖十三

(ii) $k<0$ 時只要將上圖（圖十三）上、下全等對換即可。

※原理說明：所謂 $ax-c$ 軸其實就是 $y-b=0$ 直綫，而 $y-b$ 軸就是 $ax-c=0$ 即 $x=\frac{c}{a}$ 直綫，我們就是在將 $y-b=k\sin(ax-c)$ 之圖形中視 $y-b=0$ 爲 x 軸，而直綫 $x=\frac{c}{a}$ 爲 y 軸作圖，

然後再去尋求 $x=0$（y 軸）、$y=0$（x 軸）直綫。潛在的意思仍離不開平移的定義，可是我們教學，尤其對十七歲左右學生如何能教導使之了解而有趣味呢？這是本文的用意。

叁、最大、最小值的比喻

討論最大、最小值，如果發生在函數 $y=f(x)$ 圖形，那是很容易使中學生了解，但是有些數值的變換，往往不是三言二語可以叫學生領會，像

於二次方程式：$x^2-2mx+10x+2m^2-4m-2=0$ 有二實根 α，β 的條件下，二根之積之最大值、最小值求法可由下法述說：

$\because$ 是實根，　$\therefore \triangle=(5-m)^2-(2m^2-4m-2)\geq 0$，求得 $-9\leq m\leq 3$

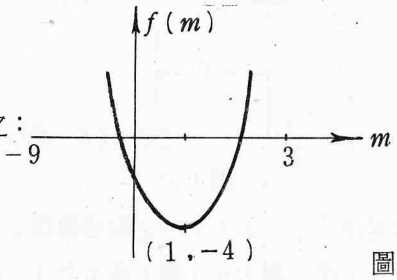
於此範圍中要求二根之積 $2m^2-4m-2$ 之最大值相當於：

$$f(m)=2m^2-4m-2=2(m-1)^2-4$$

將 m 比做 x 軸而稱爲 m 軸，其二根之積比做 $f(m)$ 軸，繪圖之：

得　$-4\leq f(m)\leq 196\cdots\cdots$

$m=-9$ 時，最大值 196；$m=1$ 時，最小值 -4



圖十四

講解過程往往只限制在 $y=f(x)$ 圖形之討論，似此變通爲 m 軸、$f(m)$ 軸之講法，從過去的教學感受中，甚多學生因此而能領悟縱軸的長處。

如：於 $x^2+3y^2=1$ 時，$2x+5y^2$ 之最大、最小亦可化爲

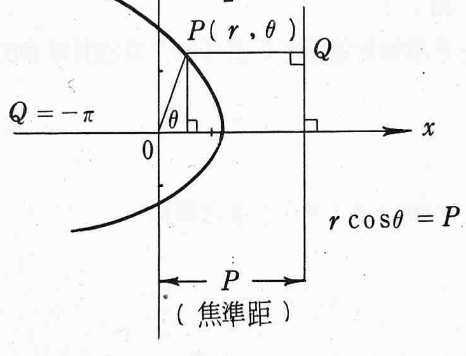
$$2x+5y^2=\frac{5}{3}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{24}{25}$$ 在 $-1\leq x\leq 1$ 時，將 $2x+5y^2$ 視爲縱軸，特別強調給十七歲左右的學生去領悟，一定有它的效果，當然對高年級學生是沒什麼稀希，然這樣的解說，在過去所敎過學生中，即使程度稍差的學生，亦能頻頻點首，而看見他們有瞭若指掌，深入其境的表情，才是可愛。

肆、極坐標系的圖形

“極坐標”在高三上課程內，學生年齡約十八歲左右，已經有平移、旋轉的概念，在此我用圓錐曲綫來說明，因爲它有準綫對錐綫的關係，比較煩雜，有代表性，要強調者在於極軸之演算，目標是減少學生記憶力的消耗！還要學生能有自行推理的能力。這是數學教學最要緊的工作。

1. 先介紹一焦點爲極點，準綫是 $\gamma\cos\theta=p$，離心率爲 e 的錐綫。由定義知道：

$$\frac{\text{錐綫上之點}P(\gamma,\theta)\text{至焦點}(0,0)\text{之距離}}{\text{錐綫上之點}P(\gamma,\theta)\text{至準綫}\gamma\cos\theta=p\text{之距離}}=e\ (\text{離心率})$$



圖十五

$$\therefore \frac{OP}{PQ}=e\text{，即}\frac{\gamma}{p-oM}=e$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{p-\gamma\cos\theta}=e$$　※註：$p>0$

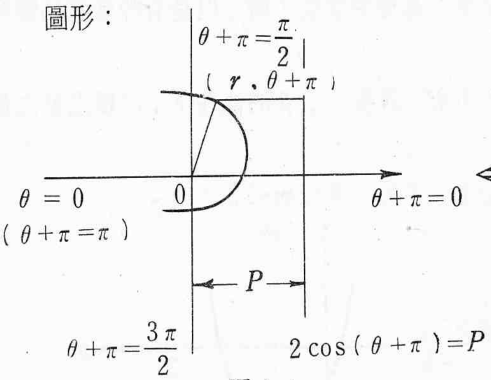
化簡得：錐綫之極方程式：$\gamma=\dfrac{eP}{1+e\cos\theta}$ …… A

我們仍然要加重語氣，（圖十五）中向徑與幅角（γ，θ）之關係是由方程式 A 而得，今後我們要從極軸（$\theta=0$）開始演算，順理推出其他各類情況：

2. 錐綫 $\gamma=\dfrac{ep}{1+e\cos(\theta+\pi)}$ $\xleftrightarrow{\text{轉化}}$ $\gamma=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$

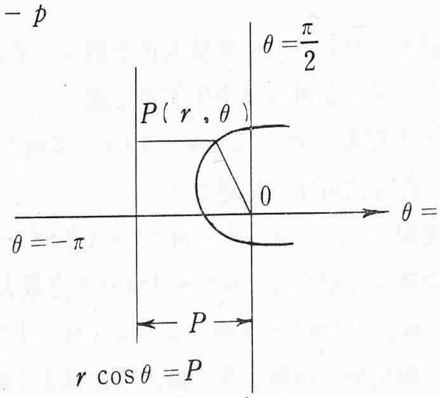
準綫 $\gamma\cos(\theta+\pi)=p\ (p>o)$ 　　$\gamma\cos\theta=-p$

圖形：



圖十六

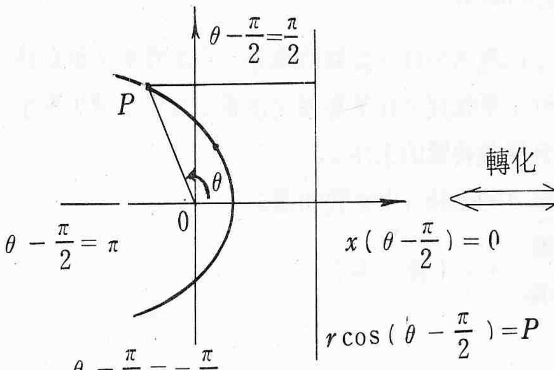
轉化



圖十七

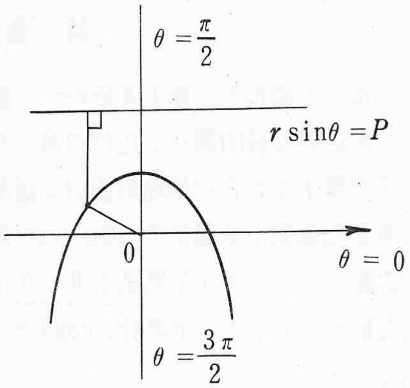
上列左圖是用（γ，$\theta+\pi$）之關係繪圖，其形狀與方程式 A 原圖全等，其中極軸的兩端所標示的幅角恰好相反，（指（圖十五）與（圖十六），我們要將（γ，$\theta+\pi$）之關係圖轉化爲（γ，θ）之關係圖。（圖十七）是將（圖十六）之錐綫圖全盤轉向而已。事實是配合我們的習慣～極軸所指之方向爲直綫 $\theta=0$ 罷了。

3.
$$\left.\begin{array}{l}\text{錐綫 } \gamma=\dfrac{eP}{1+e\cos(\theta-\frac{\pi}{2})}\\[2ex] \text{準綫 } \gamma\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=p\end{array}\right\}\xleftrightarrow{\text{轉化}}\left\{\begin{array}{l}\gamma=\dfrac{eP}{1+e\sin\theta}\\[2ex] \gamma\sin\theta=p\end{array}\right.$$



圖十八

轉化



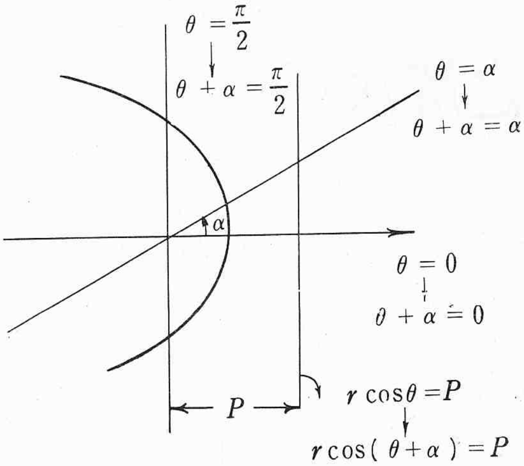
圖十九

上列二圖間的關係是將（圖十八）逆轉 90° 而得（圖十九），注意極軸和過極而垂直極軸之直綫其幅角的演算，當可看出方程式中 γ 與 θ 之變化。

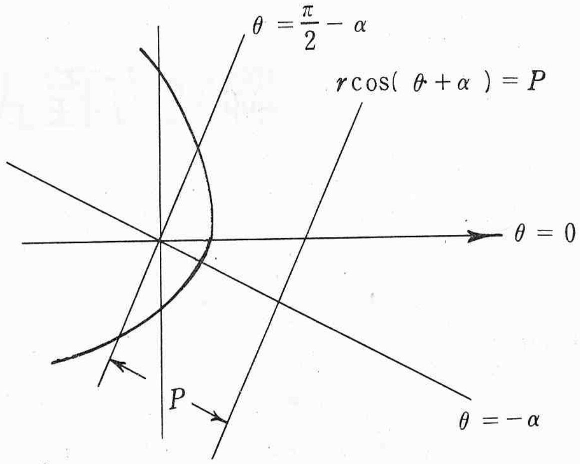
4. 一般而言：

錐綫 $\gamma=\dfrac{ep}{1+e\cos(\theta+\alpha)}$ 　　準綫：$\gamma\cos(\theta+\alpha)=p$ 之圖形

之描繪可用 $\gamma=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$ 先行製圖



圖二十



圖二十一

這意思是說圖廿是先根據 $\gamma = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$ 之（ γ ， θ ）關係作圖，完成後再將極軸 $\theta = 0$ 置換爲 $\theta + \alpha = 0$ 經過調整爲（圖廿一）的 $\theta = -\alpha$ 直綫。

直綫 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 置換爲 $\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$，經過調整爲（圖廿一）之 $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ 直綫

直綫 $\theta = \alpha$ 置換爲 $\theta + \alpha = \alpha$，經過調整爲（圖廿一）之 $\theta = 0$ 直綫

準綫 $\gamma\cos\theta = p$ 置換爲 $\gamma\cos(\theta + \alpha) = p$，經過調整爲（圖廿一）之 $\gamma\cos(\theta + \alpha) = p$ 直綫；說穿了就是順向旋轉 α 而已。

我曾經多次詢問學生，如果僅用“順向旋轉 α ”來解釋在意念上能夠衷心的接受嗎？他們的回答常是說模糊的、勉強的接納，但若用上述的坐標演算來講解時，他們的感受是有依據且是具體的領悟。

伍、結　　論

坐標軸被用來作繪圖的依據，特別是方程式中變元 x 與 y 對於坐標軸之連結，今後可以代數的觀念對圖形來轉化、調整或坐標軸的演算、比喻，對於數學的講解頗多補益，我們的願望是縮短達到教學目的所需的時間、領悟的廣度、理解之深度、學習的效度之擴充。當然，最後的期望還是“學以致用”本文就是在此信念下完成的，敬請學者專家批評指教。

——本文作者現任教於建國高中