認識單體法的幾何背景

王 進 賢

在線性計劃問題(註一):

“求定義於線性限制

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leq b_m \\ x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0\ ,\ \cdots\cdots,\ x_n\geq 0 \end{cases}$$

的解集合上的線性函數

$y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$ 的極小值,

此處 a_{ij}, b_i, c_i ,均表定實數。”

的各種解法中,單體法(simplex method)以具有豐富的幾何直觀著稱。本文擬對此加以討論。

乍看之下,這個求函數極小值的問題似乎可由微積分的方法求解。但是,事實上由於目標函數(objective function) $y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$ 是線性的,其偏導數是常數,所以線性計劃問題的解一般來說是出現在線性限制解集的邊界(boundary)上而非內部。

讓我們從幾何觀點來看這個問題。

(1)因為線性限制解集乃是由若干半空間(half-space)交集而成,而每一半空間均為凸集合(convex set)(註二),所以線性限制解集是凸多面體。

(2)因為線性限制解集是凸集合,而目標函數是線性的,所以是目標函數的局部極小(local minimum)的也必將是大域極小(global minimum)。證明見註三。

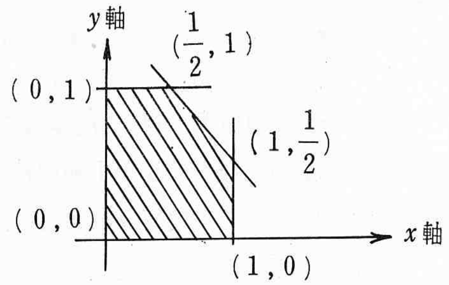
(3)因為目標函數是線性的,所以極小必將發生在線性限制解集的某一極點(extremum point)(註四)上;也就是多面體的頂點(vertex)上。證明見註五。

有了上述這些論點,我們可將單體法用幾何性方式敍述如下:先找出多面體的一個頂點,考慮以該頂點為一端點的所有邊,如果目標函數沿所有這些邊不能夠降低其值,則該頂點是為局部極小點,由(2)知其為大域極小點,問題得解。相反地,如果目標函數沿某一邊會降低其值,則順著該邊到達該邊的另一頂點,然後在這新頂點重複上述程序。因為目標函數每到一新頂點必然降低其值,因而我們不會到相同頂點兩次,而多面體僅有有限個頂點,因而,我們將在有限步驟後結束求解歷程。底下我們舉例說明:

例:設

$$\begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 1 \\ 2x+2y\leq 3 \\ x\ ,\ y\geq 0 \end{cases}$$

求 $w=-x-2y$ 的極小。



圖一

線性限制解集如圖一斜線區域所示。假如我們從原點出發,考慮以原點為端點的兩個邊,發現 w 沿該兩邊均降低其值,任選一邊,就沿 y 軸好了,我們到達(0,1)點。從(0,1)點我們發現沿水平線

到（$\frac{1}{2}$，1）點繼續降其w的值。而在（$\frac{1}{2}$，1）點，沿所有以該點為端點的邊均不再降低w的值，因此，在（$\frac{1}{2}$，1）點得w的極小，問題得解。

前面所談乃線性計劃問題單體法的幾何性說法，它能幫助我們瞭解單體法代數步驟的演進，限於篇幅，我們不擬對代數步驟再加闡述，有興趣的讀者可以任意找本線性計劃的書參考（如參考資料〔3〕）。底下我們擬將上面所介紹的做一點推廣。

在線性計劃問題中，線性限制的個數有限。如果我們讓個數無限，情況會怎樣呢？

首先，我們看問題會變成如下形式：

"求定義於封閉凸集合（closed convex set）$S \subset E^n$ 上的

線性函數　$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$ 的極小。"………………（甲問題）

理由見註六。而形如

"求定義於封閉凸集合$R \subset E^{n-1}$上的凸函數（convex function）（註七）$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1})$ 的極小值。"

這種的凸性計劃問題（convex programming problem）（註八）可改寫為形如

"求定義於限制

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}) - x_n \leq 0 \\ (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}) \in R \end{cases}$$

（在E^n上）的解集上的線性函數　$y = x_n$的極小值。"

的問題，此乃前述甲問題的特殊形式。

因此，當我們把線性限制個數從有限改成無限之後，我們進入非線性計劃中的凸性計劃部份了。前面所談線性計劃的三點幾何特性對於甲問題是否仍然成立？

大體來說，這三點特性仍然成立（註九），只是限制解集（也就是目標函數的定義域）是凸集合而不再是凸多面體就是了。因為不再是多面體，所以極點也不是多面體的頂點了。極點的個數一般來說也從有限個變成無限個了。因此，雖然目標函數的極小仍然出現在極點上，但是單體法所使用從一個極點換到下一個極點的方式卻不適用了。不過，由於三點幾何特性基本上仍然成立，處理甲問題我們有所謂割面法（cutting plane method），其方式如下：

找一個多面體$P_k \supset S$，進行

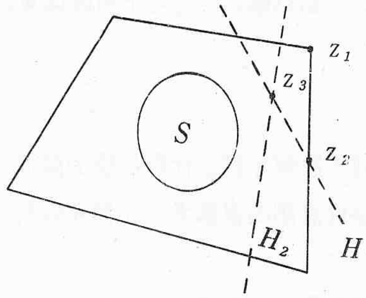
步驟1：在P_k 上找出一頂點$z_k \in E_n$使$y = c_1x_1 + \cdots\cdots + c_nx_n$ 為極小，如該頂點在S上，則頂點為極小點得解。如該點不在S上，則進行

步驟2：找一個超平面（hyper plane）H_k分離z_k點和S，那也就是說找一組數字$a_{k1}, a_{k2}, \cdots\cdots, a_{kn}, b_k$使得超平面的方程式為　$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots\cdots + a_{kn}x_n = b_k$　而

$$S \subset \{(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \mid a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots\cdots + a_{kn}x_n \leq b_k\},$$

點$z_k \in \{(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \mid a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots\cdots + a_{kn}x_n > b_k\}$。

把條件　$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots\cdots + a_{kn}x_n \leq b_k$ 加到P_k的條件內得一新的多面體。再重複上述步驟，不斷更新多面體。進行過程如下圖：



此箭頭表 $-C=〔-c_1, -c_2, \cdots\cdots, -c_n〕$ 向量的方向。則割面法進行過程大致如圖所示（註十）。

圖　二

上面所述是割面法的幾何外貌，至於代數運作過程則隨著不同的尋找超平面來分離點和 S 的方法而有差異。我們不再討論下去，有興趣讀者請看有關非線性計劃的書如參考資料〔2〕。

註一：所謂線性計劃問題是指在線性限制下求線性目標函數的極值問題。它有多種表達方式，彼此可以互換，此處僅以所列問題做為代表。有關互換問題請參閱線性計劃的書如參考資料〔3〕。

註二：設集合（$C E^n$, 若對於所有 $z_1, z_2 \in C$, $\alpha \in R$, $0<\alpha<1$，點 $\alpha z_1+(1-\alpha) z_2 \in C$，則集合 C 稱為凸集合，如直線、平面、半空間等等均是。

註三：請參看參考資料〔2〕$P.119$。

註四：凸集合 C 上的點 z 若找不到 C 上相異兩點 z_1，z_2 使得　$z=\alpha z_1+(1-\alpha) z_2$　$0<\alpha<1$，則點 z 稱為極點。如多面體上的頂點，圓面的圓周上的點等等均是。

註五：同註三。

註六：每一個線性限制的解集為凸集合，無限個的交集仍為凸集合。反過來看，凸集合 S 可表成所有包含 S 的半空間的交集。此種半空間有無數個，而每個半空間均代表一個線性限制；因此，S 就可看成滿足無限個線性限制的解集。

註七：定義在凸集合 C 上的函數 f 若滿足下述條件則稱為凸函數：　對所有 z_1，$z_2 \in C$ 和所有 $0 \leq \alpha \leq 1$ 的實數 α，$f(\alpha z_1+(1-\alpha) z_2) \leq \alpha f(z_1)+(1-\alpha) f(z_2)$。

註八：所謂凸性計劃問題是指限制及目標函數均為凸函數或凹函數的極值求解問題。函數 f 為凹函數若且唯若 $-f$ 為凸函數。

註九：三點幾何特性對於求定義在封閉凸集合上凸函數的極大和凹函數的極小問題均成立。不過對於求凹函數的極大或凸函數的極小問題，需先換成本文中甲問題形式，第三點特性──極值點出現在極點，才能成立。例如，定義在 $x^2+y^2 \leq 1$ 的凸函數 $z=x^2+y^2$ 的極小出現在（0，0）點上，但是，（0，0）點並非凸集合 $x^2+y^2 \leq 1$ 的極點。

註十：從幾何觀點來說，只要把甲問題（包括本文開頭的線性計劃問題）中的凸集合 S 的圖形和線性函數 $y=c_1 x_1+c_2 x_2+\cdots\cdots+c_n x_n$ 的梯度（gradient）向量的方位劃出，我們將很容易看出與梯度向量垂直的所有超平面中，只有兩個超平面和凸集合 S 的交集都是邊界點。在梯度向量箭頭方向的那個超平面與凸集合 S 交集出來的點是使線性函數 y 為極大的點，箭尾方向的是為極小點。因此，我們將很容易體會圖形中的進行過程。

參考資料：

〔1〕 G. Owen　Game Theory　pp.45－46。

〔2〕 D.G. Luenberger Introduction to Linear and Nonlinear Programming P.119，PP.306－307。

〔3〕 D.M. Simmons Linear Programming for Operation Research PP.50－55，chap. IV.