卡 特 藍 數 學

林 克 瀛 譯

一九七六年六月份**科學的美國人雜誌**在數學遊戲專欄中介紹卡特藍數列Catalan numbers，這個專欄由加德納主持很受歡迎。說起來令人難以相信，一直到一九七三才有一本「整數列手册」（A Handbook of Integer Sequences）出版，這本書是貝爾實驗室的史隆（Sloane）編的，包含了兩千三百多個數列，其中第577個是

1，2，5，14，42，132，429，1430，4862，16796，……

稱為卡特藍數列。在排列組合的問題中常常出現。尤拉是在研究下面的問題時發現這個數列的：有多少種方法可以把一個正多角形利用不相交的對角線分割成許多三角形？若以n代表正多角形的邊數，則$n=3$，4，5，6時結果如圖一所示。每一n邊形由$n-3$條對角線分割為$n-2$個三角形。尤拉用歸納法

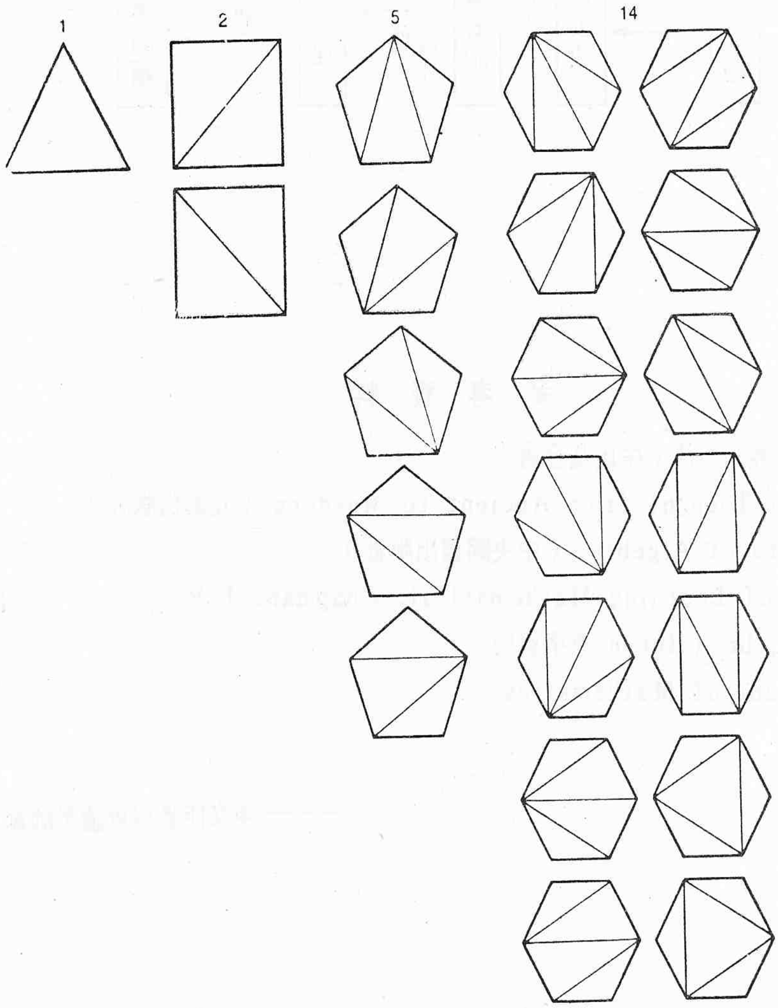

圖 一把一個正多邊形分割為三角形

經過一些繁複的步驟後得到一個公式

$$\frac{2\times 6\times 10\times\cdots\cdots\times(4n-10)}{(n-1)!}$$

有一個非常簡單的方法可用來計算這個數列，先在數列之前加上1：1，1，2，5，14，……。設k是計算時最後的一個整數，而n是下一個數的位置，則下一個數是

$$k(4n-6)/n$$

與尤拉同時（十八世紀）的一位數學家史格納（von Segner）發現了另一種方法如下：

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 \\ \times\ \underline{14} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{1} \\ 14 & +5 & +4 & +5 & +14 = 42 \end{array}$$

也就是說要算下一個數時，先把以前的數列先順序寫下來，再沿相反秩序寫在下面一行，再一對對（上下兩數）相乘，乘積相加就是下一個數。

比利時數學家卡特藍在1838 解決了下面的問題：我們有n個字母排成一排，想在上面加上$n-1$對括弧（每一對由左及右括弧組成），每對括弧內包括兩項，可以是兩個字母，或一個字母及另一對括弧，或者兩對相鄰的括弧。請問有多少種方法？$n=2$時只有一種方法（$a\ b$）。$n=3$時有兩種方法即（（$a\ b$）c），（a（$b\ c$））。$n=4$時有五種：

（（$a\ b$）（$c\ d$）），（（（$a\ b$）c）d），（a（b（$c\ d$））），

（a（（$b\ c$）d）），（（a（$b\ c$））d）

這樣得到的數列也是卡特藍數列。

孚德（Forder）在1961 年想出一種簡單的法子證明尤拉和卡特藍二人所研究的問題是一一對應的，他的方法如圖二所示，圖中有一個正七邊形，除了底下一邊外每一邊均以字母（由a到f）標明。由相鄰二邊所成的三角形在裏面的一條對角線上用一對括弧包含兩個字母表示，例如圖二當中的（$a\ b$）及（$d\ e$），其他依次類推，最後輪到底下的一條邊。

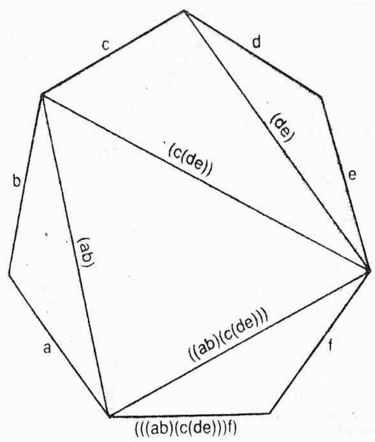

圖 二 孚德的證明

英國數學家凱利（Cayley）證明卡特藍數代表有多少株平面上三叉有根的樹（planar, trivalent and planted trees）。這裏用的是圖形理論（graph theory）中的語言，所謂樹是指沒有環路（circuit）而彼此相連的圖，如圖三中央所示，平面是指這株樹可以畫在平面上，所有的線不會相交，有根是指圖形有一主幹（trunk），末端叫做根（root）。三叉是指每一個節點有三個枝幹相接。由圖三可容易的看出來尤拉（左方），樹（中央）及卡特藍的括弧是一一相應的。在圖三中右方，若以1代表左括弧及0代表字母，則所得數列寫在符號的下面，右括弧不必理會因只有一種方法使用。這樣每一種分割多邊形的法子都可以用一連串的1和0表示，非常方便。

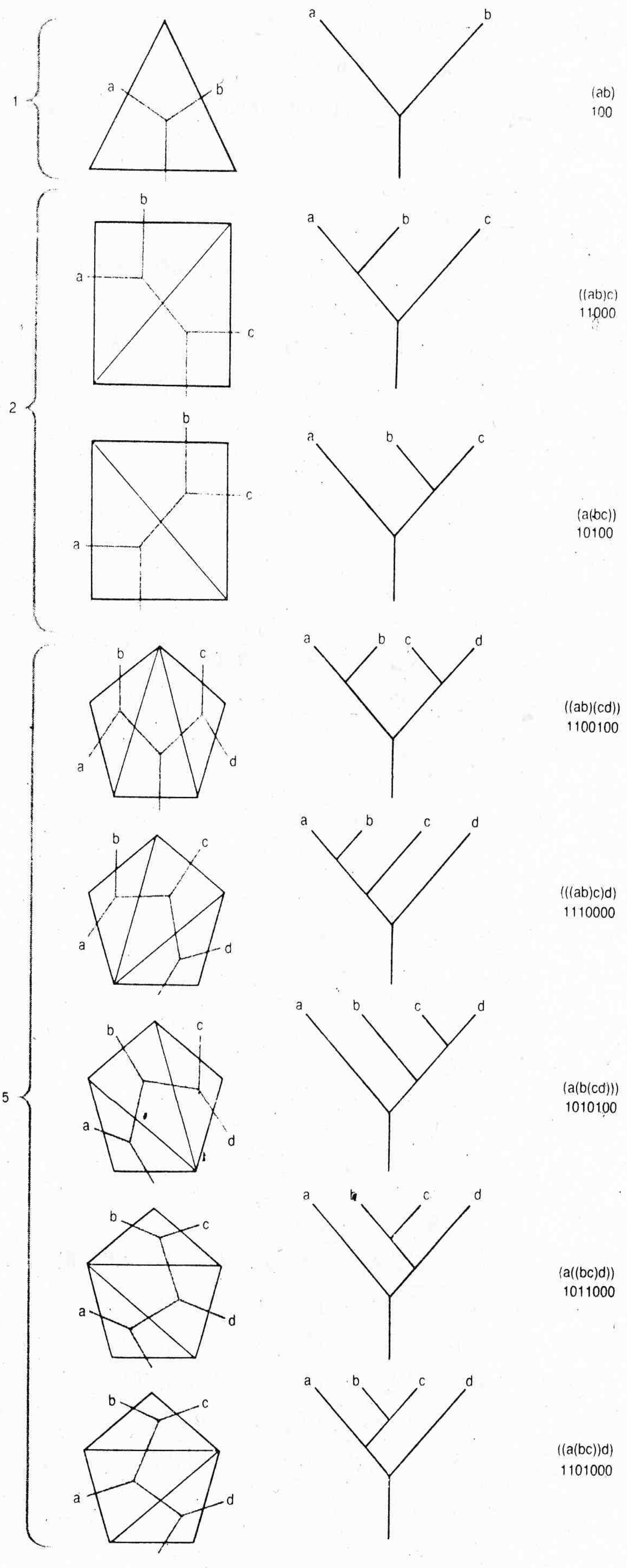

圖　三　多邊形的分割（左）和樹（中）都可以用括弧（右）表示出來

波蘭數學家盧卡史維其(Lukasieuicz)找到一個有趣的方法來決定每棵樹的代表數(見圖四)。圖中的樹有四個末端，用四個 0 代表，三個三叉節點以三個 1 代表。想像一條蟲沿圖中的虛線爬過整棵樹又回到原處。每一次蟲碰到節點或末梢就把代表的數唸出來(同一點只唸一次)，這樣得到的數串正好是圖三中的代表數。

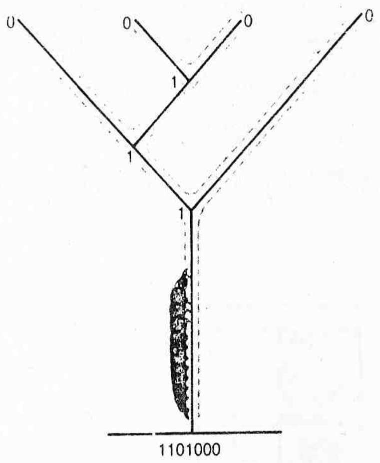

圖　四 一條蟲產生樹的代表數

在 1964 有人發現卡特藍數也代表普通樹的數目，普通樹上每一節點可以有許多分枝(不限於三)，這裏 n 代表一樹的末端及節點的總數(不計樹根)，如圖五所示。換句話說，n 代表一棵樹的枝(edge)。邊哈(Bernhart)用圖五來說明三叉樹和普通樹的關係。在圖五中的三叉樹，畫的時候把相交於同一個節點的三根樹枝分別指向正上方、正下方和右方。然後再想像把指向右方的一截樹枝縮爲一點而整個消失，若是這一段樹枝的右端是連著一個三叉節點，則左端和右端的兩個節點合而爲一。所有垂直方向的枝都

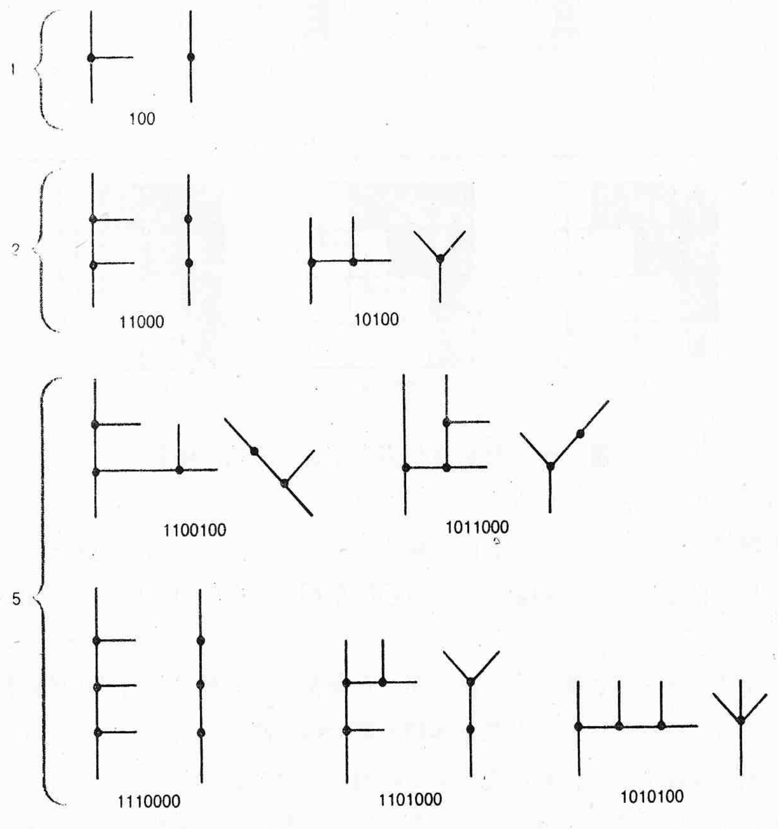

圖　五 三叉樹轉化爲普通樹

保留。這個方法把全部具有n個端點（ end ）的有根三叉樹轉變爲全部具有n個分支的普通樹。一條蟲在爬過一棵普通樹（圖五右邊的樹）時只要照下述方法就可以唸出和它的同伴（圖五左邊的三叉樹）完全相同的代表數（寫在圖五每一對樹的下方：蟲由最接近樹根的節點（不像圖四那樣由根開始）往上爬，每一次當它沿一節樹枝往上爬時唸 1 ，往下爬時唸 0 。

現在考慮各種大小的棋盤。圖六中所有在對角線（由右上角到左下角）左邊的方格子都塗成淺黑色。在棋盤的左下角放一隻「車」（圖中西洋棋城堡形棋子著法和象棋中的車一樣），如果我們要把車由左下角移到右上角，但不准進入塗黑的方格中，同時只准向右走或者向上走，對一個每邊長爲n的棋盤，試問有幾種不同的走法？答案又是卡特藍數。證明如下：在圖六中在每一個棋盤下方寫下某一個n端點有根三叉樹的代表樹。由該數左邊開始，第一位若是零棋子往上移一格，若是一就向右移一格，最後一位數則略去不理，這樣可得到全部棋子的走法。

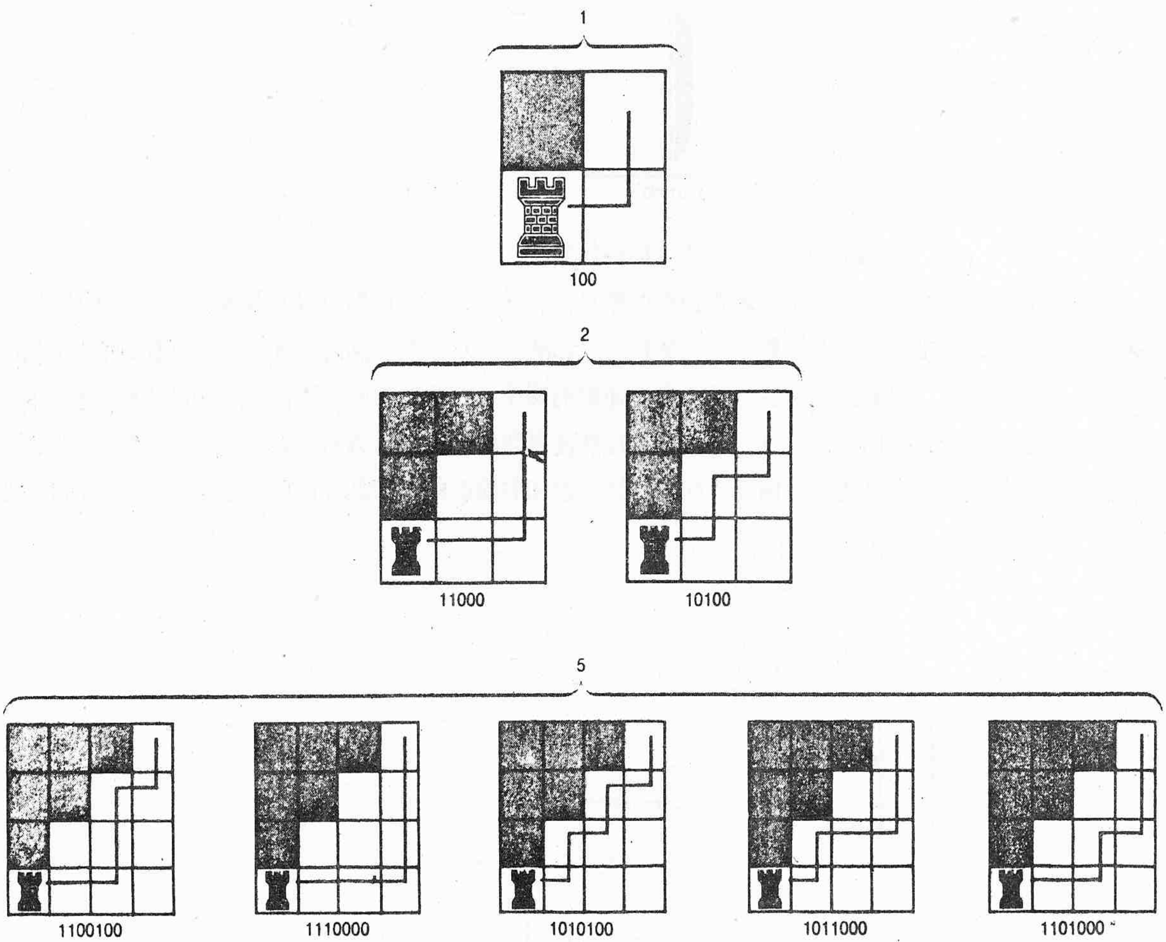

圖　六 卡特藍數代表棋子各種走法的總數

下面是用卡特藍數可以解決的六個問題：

一、甲乙兩人競選，每人都得n票，試問若集中$2n$張票逐一唱票時，如果甲的票數永遠不比乙少，有幾種計票法？（只要把投給甲的票相當於 1 ，投乙的票相當於 0 即可，樹的代表數最右邊永遠是 0 ，可置之不理）。

二、把一角一元及五元三個硬幣放在一排。在一角硬幣上放一疊n張面朝上的紙牌，每一張牌上有一個數字，並假定n個數由最底下一張往上算是連續整數。每一次把一張牌由一角硬幣上移到一元硬幣上或者由一元硬幣移到五元硬幣上，兩種移法混合使用經過$2n$次移動以後，所有的紙牌都移到五元硬幣上。試問最後這一疊n張紙牌上的數字有幾種排列法？（以 1 代表由一角硬幣移到一元硬幣，以 0 代表由一元硬幣移到五元硬幣）。

三、一個醉漢離開酒吧往前走，每一步長度一樣，但他每一步有兩個選擇，向前或向後。試問有幾種方法使他走 $2n$ 步後返回原處？（以1代表向前，0代表向後）。

四、有 $2n$ 個高矮都不同的人站成兩排，每排 n 人。規定每一排人的高度都是每一人比右邊的人高，同時前排的每一人都比站在他正後方的人高，試問有幾種排法？（把所有的人依高矮編號1，2，3等，同時也把卡特藍數的代表數中每一位數字由左到右編號，若第幾位數是1，則屬於該號的人站前排，是0則站後排）。

五、入場劵五元一張，有 $2n$ 個人排成一行買票。半數的人手持十元，半數的人五元。賣票的人開始時手上沒有錢。試問有幾種排法可使得售票員永遠有零錢找給買票的人？（以1代表五元，0代表十元）。

六、$2n$ 個人在圓桌旁坐下，每人伸一隻手握住另一人，規定沒有兩對手彼此交錯，試問有幾種方法？或者在圓上取 $2n$ 個點，在每兩點之間連一條弦並且不得兩弦相交，試問幾種畫法？邊哈有一個簡單的幾何表示法如下：

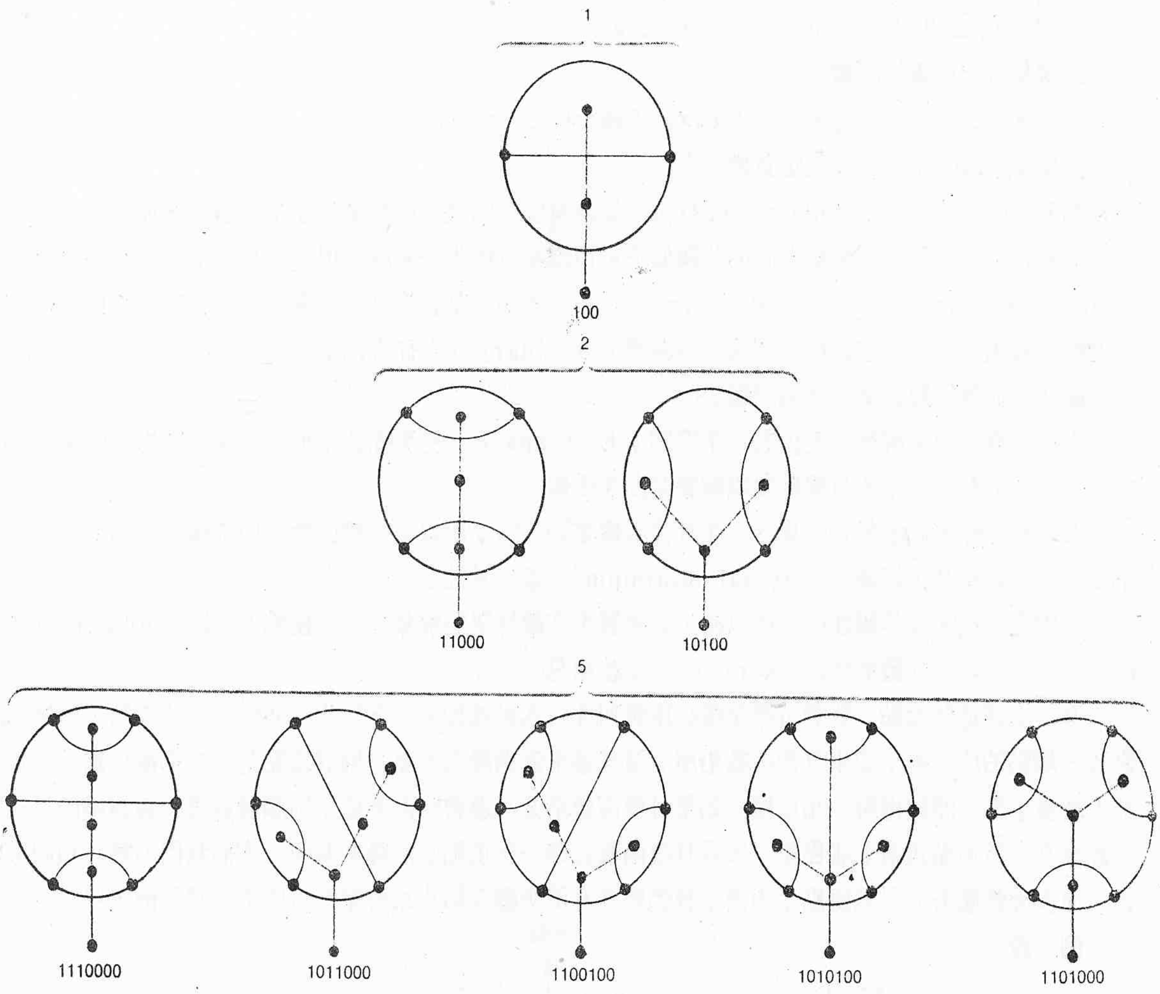

圖　七 有根樹與不相交的弦之間的對應關係

在圖七中，一個圓上有 $2n$ 個點，與一棵具有 $n+1$ 節樹枝的有根正常樹一一對應。

若卡特藍數列開始是1，2，5，……則第 n 個數可用一簡單公式表示：

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

若改為1，1，2，5，……則所有數列中的奇數都出現在（除1以外）$n=2^k$（k為連續整數）的位置，而且在這些位置的數也必然是奇數。

——本文作者現任教於清大物理系