群的研究（數學體系的發展）

劉奕璋

題目的含義並非我對群的研究有新的發現，或有更精深的見解，然而它卻是一位數學系三年級的學生，企圖去了解群的眞正內涵，做了一連串的研究後所得到的心得。他的觀念是否成熟？是否正確？我希望大家給我批評及指正，使我能更進一步去了解數學眞正的內涵，這是我寫這篇文章最大的期盼。

對一位數學系二年級的學生來說，數學及數學家的工作對他是陌生的，就這樣，他開始學習抽象代數，一般的教授授課，又只限於定義的說明，定理的證明，學生所能了解的亦只是證明無誤，或自己會證明習題。然而群的眞正內涵是什麼？都一概不知道，這使得大學數學系的教學變成數學符號的邏輯遊戲。學生只知邏輯推理，卻不知數學概念的眞正內涵。所以我企圖從別的觀點來說明如何去研究群的觀念。我假設以一位高中畢業生的程度爲起點行爲，提供一些觀念做爲基礎，使數學系的學生能更了解群的來龍去脈，也能了解數學家如何利用公設系統發展抽象代數。我將數學的特性、公理系統的認識及數學家如何發展一支數學體系，做爲研究抽象代數應該先具備的基礎，有了這些基礎，我們才可能對群更爲了解。這個計劃對於數學系的同學或許有所幫助，也是我個人對群研究的心得。以下是較詳細的說明：

一、數學的特性

若想要將一門科學介紹清楚，必須詳細的敍述這門科學的主要性質，如果忽略了這一點而專講細節，不論你說得如何清楚，也很難給人一種整體的概念，所以對於數學的特性是什麼，應該先有明確的認識。

據我粗淺的了解，數學的特性有：抽象性、精確性、邏輯的謹嚴性、結論的不可辯駁性及應用的異常廣大性等。

抽象的涵意是什麼呢？抽象就是對某一類事物，拋棄某些性質，而專注於某些相同的性質。簡而言之，就是捨異求同。例如桌上有鉛筆一支，橡皮擦一個及一本書。我們不管它們各由什麼東西組成，形狀是什麼或什麼顏色。但它們都有一個共同的特徵──單數。我們抽象化後稱它們的數量都是“１”。又例如：鋼線、銅線、鐵線、綿線……等在數學上都抽象成“線”了。這兩個例子，前者是代數上的抽象，它於“量”有關係。後者是幾何上的抽象，任何一個幾何形都是自實物的性質抽象而來，最後只剩下空間的形式與維度。

數學理論發展到今日，它們抽象的程度極高，以致明顯的與人們的生活脫節，亦令人覺得數學與生活毫無關係，例如：n 維空間甚至無限維空間。事實上，數學上的抽象完全是來自現實生活中的，數學並非數學家憑空創造出來的。

抽象性並非只存於數學中，任何一門科學，甚至心智活動都有。爲了區別起見我們尙須注意數學抽象性的特徵：第一、數學是討論量的關係與空間形式的一門科學。其它的物體性質一概不管，若數學加上物體的性質就變成物理學了。第二、數學的抽象性是一連串的，其抽象的程度遠比其它科學深遠。第三、數學的活動幾乎完全限於各種抽象觀念及它們彼此關係的領域裏，數學家只做論證與計算的工作。

人類對於親眼看到的事實，或合乎邏輯推理的敍述，是完全相信，而且沒有反駁的餘地。在數學上任何一個定理都是經過嚴格邏輯的論證。所以數學眞理是無懈可擊的，是完全不可辯駁的。但數學的嚴格性並非絕對的，數學的謹嚴性只發生在連續發展的過程中。例如在歐氏幾何中我們有：“通過不落在一已給直線上的一點，不能引出多於一條的直線平行於這已給的直線。”但在非歐幾何中“過不落在一所予直線上的一點，至少有兩條直線平行於這所給的直線，可以被引出來。”雖然這兩個結果是完全對立的，似乎失去了數學的謹嚴性。但這並非在發展過程中所導出的結果，而是公設的不同而已。歐氏幾何與非歐幾何

在推演的過程中都具有謹嚴性。

數學的活力在於它的觀念與結果，儘管極其抽象，却都是源自實際的世界，並在工程上，其它科學上及日常生活的事物上有廣大的用途。如果我們細心體察日常生活中，計算費用、計算公寓的面積，民意調查的統計資料，都可發現數學的應用。數學是科學之母，任何一種技術程序都必須經過數學的計算而完成的。沒有數學就沒有今日的工藝。在力學、天文學、物理學甚至化學中，它們的定律都必須用數學公式表示，數學是這些科學發展的工具。

以上是數學上一些特性的概述。

二、公設系統——數學家如何發展一支數學體系

公設是自明的，數學家接受它是正確的，但不加以證明，如果我們加以證明亦只是在繞永無休止的大圈子而已。數學家接受公設就像人民遵守法律一樣。公設系統源於歐氏的“幾何原理”；當初只用於幾何上，今日公設系統已深入所有的數學分支，於此也顯示了公理系統的重要性。

數學家發展一支數學體系，首先由一組公設開始，接著定義一些名詞，由此公設及定義，依照邏輯論證而發展出許許多多的定理。甲數學家用一組公設 A，乙數學家用另一組公設 B，甲、乙兩數學家所導出的定理必然是不同的。只要它們有實用的價值都可以被人們所接受。我們可自歐氏幾何與非歐幾何得到證明。

公設系統並非隨意定訂的。一組公設的選擇必須滿足⑴一致性（ consistency ）⑵獨立性（ independence ），否則它是不能讓數學家們所接受的。

⑴一致性：

公設的選擇首先必須不具有矛盾，亦即保證由公設所產生的定理不互相矛盾。例如我們不可接受某個公設能導出圓是圓形的，而另一個公設能證明圓是方形的。不具有矛盾的一組公設我們稱之具有一致性，任一組公設都必須具有一致性。

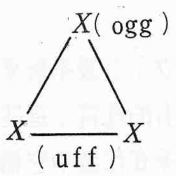
公設是由包括單字（ word ）的敍述（ statement ）所組成。就好像人類無法證明每一個“敍述”，人類亦不可能定義每個單字，爲了避免永無止境的定義，在公設中，我們必須接受許多無定義的名詞。然而我們要如何檢驗由一些無定義名詞所構成的一組公設具有一致性呢？檢驗的方法是利用模型（ model ）。只要我們能找到一個具體的或物質性的（ physical ）的模型，使得每一條公設都滿足這個模型，則我們稱這組公設具有一致性。若找不到模型則這組公設的一致性是令人懷疑的，因爲雖然現在沒有人能找到模型，誰敢保證一百年後也沒有人能找到呢！除非我們能先證明這組公設具有一致性，否則我們是不能利用它來導定理的。

範例：公設 1 ：存在正好三個“ ogg ”

公設 2 ：至少存在一個“ uff ”

公設 3 ：在每一個“ uff ”上正好有二個“ ogg ”。

其中“ ogg ”“ uff ”皆爲無定義名詞。我們要證明這組公設具有一致性，就必須找到滿足這三個公設的模型。假設我們用“ x ”符號表“ ogg ”。用“ ____ ”線段表示“ uff ”，考慮下圖模型：



則此模型滿足以上三個公設，所以我們稱此組公設具有一致性。

⑵獨立性：

在一組公設中，沒有任何一條公設能由其它的公設推導出來，也就是這組公設中，任何一條公設都不是定理，則我們稱這組公設具有獨立性。一組公設的獨立性又該如何檢驗呢？檢驗的方法是：對於每一個

公設，我們都能找到一個模型滿足其餘的公設，但本身不滿足。若有一組公設有三條公設則我們必須找到三個模型。第一個模型滿足公設 2 、公設 3 ，但不滿足公設 1 。第二個模型滿足公設 1 、公設 3 ，但不滿足公設 2 。第三個模型滿足公設 1 、公設 2 ，但不滿足公設 3 。每一個模型表示一條公設具有獨立性，若三個模型皆滿足則這組公設是獨立的。此方法可類推於 n 個公設中。

範例：公設 1 ：存在三個不同的“房子”

　　公設 2 ：任何兩個不同“房子”在一條“街”

　　公設 3 ：不是所有的“房子”在同一條“街”

　　公設 4 ：二條不同的“街”至少存在同一個“房子”

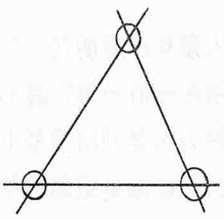
如果我們以“T”表“眞”。以“F”表示“假”則我們所要檢驗的種類可以以下表說明：

公設 / 眞假值 / 被檢驗者	1	2	3	4	模型
一致性	T	T	T	T	(a)
公設 1 具有獨立性	F	T	T	T	(b)
公設 2 具有獨立性	T	F	T	T	(c)
公設 3 具有獨立性	T	T	F	T	(d)
公設 4 具有獨立性	T	T	T	F	(e)

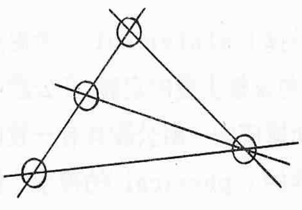
模型圖示於下；我們都可發現，各個模型都能滿足被檢驗的種類。所以我們可以稱這組公設具有一致性與獨立性。

我們以“○”表示無定義的“房子”，以“——”表示無定義的“街”則模型爲：

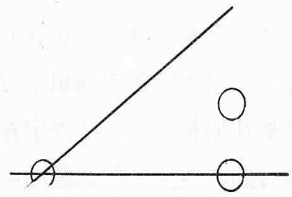
(a)



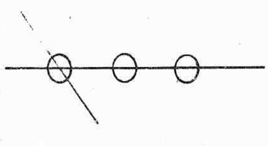
(b)



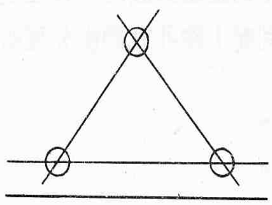
(c)



(d)



(e)



以上我已經說明了數學家，如何檢驗一組公設系統的獨立性與一致性。以及數學家如何利用公設系統去發展一支數學體系。現在我們來看看公理系統的重要性。我們可分爲兩方面來說：一、它奠定了數學的基礎。二、它是重要的數學研究的工具。

公理系統是從許多實際的例子，抽象化取其一部份性質，捨棄其餘的性質，建立了公設系統來加以研究。當我們研究了一個公設系統，我們等於研究了許多實際的例子，公設系統所具有的性質，這些實在例子都一樣具有的。而且公設系統的研究，有時簡易於實在例子的研究。例如：實數系在代數中它構成體（ field ），在拓樸學中它能構成拓樸空間（ topological space ），當我們研究了體中的性質或拓樸空間的性質，則實數系都具相同的性質。我們更可在下節，群的歷史背景中發現公設系統發展數學體系的重要性。

三、羣的歷史背景

十八世紀末，十九世紀初數學界還是熱衷於多項式方程式的解法。其中有高斯（Causs）愛伯爾（Abel's）、伽洛伊（Galoi's）等重要的數學家，他們在追求高次方程式諸根之解的各問題中，發現諸根的等價及對稱兩個性質，對於整個問題的解決頗基本而且重要。於是有群的觀念的發展。我們也可以說群的起源是因爲想找出一種工具以研究實際世界中像“對稱”這樣重要的規律性。雖然對稱現象我們於生活中、幾何物體或物理物像中，常可直覺的觀察到。但對於“什麼是對稱”的精確且一般的描述，特別是對稱性質的定量說明，就需要利用群的理論了。

古典的代數只限於數運算性質的研究，當代代數更致力於具有“更一般本性之元素”上各種運算諸性質的研究。這種更一般本性的元素，也可以說是自向量（vectors）、矩陣（matrices）、四元數（quaternious）、轉換(transformation)及取代或置換（substitutions or permutations)等代數體中抽象化而來的。幾乎整個十九世紀數學家對於矩陣、向量、四元數……等代數課題都是各別討論的。到了十九世紀最後十年數學家發現他們都具有某些共同點：例如它們都擁有一種運算——集合中的某二個元素經過運算後，所產生的第三元素還是在相同的集合中。於是數學家不再各別去處理這些代數課題了，而採用了公設系統來處理它們。從這些實在例子中，取其一部份性質加以抽象化來研究。這樣帶給數學家許多簡便之處。當我們研究了群中所具有的性質時，我們就知道在矩陣、變換取代或置換、四元數或向量都具有這些相同的性質了。這使我們節省了更多的時間。

四、羣的定義及基本性質

對於群的定義及基本性質，我不想以精確的數學語言來寫，我希望用更一般的語言來說明，並設法使人的心智活動導入秩序化。這樣的寫法或許是不成熟的，不完善的，但對於初學者能更了解群的抽象涵義。

數學家對於個別的事物是不感興趣的，數學家所感興趣的是某一類具有某些共同性質的事物。這類事物數學家給予一個抽象的名詞——集合（set）。任何兩個集合 A、B，必定具有某些關係存在，若沒有關係存在數學家是不會加以注意的，爲了表達及研究二個集合的關係，數學家定義：

Catesian product（$A\times B$），$A\times B=\{(a\quad b)\mid \forall a\in A, \forall b\in B\}$

在一堆$(a\quad b)$元素所成的集合，可能有某些特徵，這種特徵我們稱爲集合 A 與 B 之間的關係（relation），所以關係（relation）就是 $A\times B$ 的部份集合（subset）。

某種特殊的關係我們稱爲函數（function）

定義：函數 f 從集合 x 到集合 y。$f: x\rightarrow y$

滿足：$(x\quad y_1)\in f$，$(x\quad y_2)\in f\ \Rightarrow y_1=y_2$ 即每一個元素 x 在集合 x 中，存在唯一的元素 y 在集合 Y 中與之對應。

特殊的函數 $g: S\times S\ \rightarrow S$，$g(a\quad b)=c$，$a$，$b$，$c\in S$

即任二個集合 S 中的元素 a、b，由特殊的函數 g 帶到 c 元素，c 亦在 S 集合中，我們稱此特殊函數爲二元運算（binary operation）有時我們亦稱此運算具有封閉性。

在一個集合 S 上存在一個或多個運算，則我們稱此集合 S 爲一個數學體系(mathematical system)。

以上所論述我們可以發現數學家的定義具有一定的程序，以圖表示更能使我們了解。我們也可以看出特殊化的功能。

$$\boxed{\text{自然界的事物}} \longrightarrow \boxed{\text{set}} \longrightarrow \boxed{A\times B} \xrightarrow{\text{subset}} \boxed{\text{relation}} \xrightarrow{\text{特殊化}} \boxed{\text{function}}$$

$$\xrightarrow{\text{特殊化}} \boxed{\text{binary operation}} \longrightarrow \boxed{\text{mathematical system}}$$

數學家又定義特殊的運算“ $*$ ”

結合律：$a*(b*c)=(a*b)*c$ $\forall a, b, c\in S$

交換律：$a*b=b*a$ $\forall a\, b\in S$

及定義特殊的元素：

單位元素（e）：$a*e=e*a=a$ $\forall a, e\in S$

反元素（a^{-1}）：$a*a^{-1}*a=e$ $\forall a\in S, a^{-1}\in S$

一個不爲空集合的集合G，及一個二元運算$*$，滿足下列四個性質，則我們稱（G，$*$）爲群（group）

1. 運算$*$具有封閉性
2. 運算$*$具有結合律
3. G中包含一個單位元素
4. 對於每一個G中的元素，存在一個反元素在G中。

我們從群的歷史背景及群的定義過程，可知群是一個運算體系，任何一個集合，我們可以依群的定義來檢驗，它是否是群，如果某個集合是群則我們在群中的運算性質馬上可以應用到這個集合上，而不必再重頭去尋找這個集合有什麼運算性質了。以下列出一些群的基本性質。

(1) 單位元素是唯一的，而且群中的每一個元素存在唯一的反元素。

(2) $(a^{-1})^{-1}=a$ $\forall a\in G$（G表群）

(3) $(a\,b)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ $\forall a, b\in G$

(4) 群中的每一個元素具有消去律：

$ax=ay \Rightarrow x=y$ 且 $xa=ya \Rightarrow x=y$ $\forall a, x, y\in G$

(5) if $a, b\in G$ $\Rightarrow ax=b$，$ya=b$，在G中有唯一的解。

(6) $a^m a^n=a^{m+n}$ $\forall a\in G, m, n\in Z$（整數）

(7) $(a^m)^n=a^{mn}$ $\forall a\in G, m, n\in Z$

五、羣的應用

群的廣泛應用，業已成爲數學上的一個專題，有專門的書籍在討論，例如：群論在物理學上的應用（the application of group theorey in physics; Lybarskii）在此書中我們可以知道，群論不只抽象的概念，也有它的廣泛應用,，這也證明了一句話：“不管數學上的概念是何等的抽象，都有它的應用性”。由於應用的例子過於艱深，非我能力所及，於此不舉例。但我想舉一個在我們日常生活中，常常接觸到而與群有關的例子。

馬達是每一個人都常接觸到的一個儀器，錄音機上的正繞及反繞就是馬達的裝置。如果我們以a表示馬達正轉的作用，以b表示馬達反轉的作用。$a\circ a$表示正轉之後再正轉，結果還是正轉。$a\circ b$表示正轉之後再反轉，結果是反轉。$b\circ b$表示反轉之後再反轉，結果是正轉。$b\circ a$表示反轉之後再正轉，結果還是反轉。以圖表列出爲下：

$\circ$	a	b
a	a	b
b	b	a

我們可以得知a爲單位元素

a的反元素爲a，b的反元素爲b，

所以這一個體系構成一個群。這是一個很微妙的例子。

六、結　　語

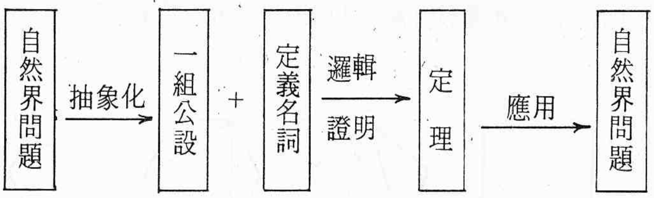
我們在以上的論述中，可以了解抽象性在數學中所扮演的角色，也是數學家必須經常使用的方法之一

。雖然現代的數學已經抽象到令人覺得與生活內容完全脫節，但我們必須了解，抽象數學的內容是來自實際世界的，這也是爲什麼數學的應用範圍異常廣大的原因。這點我們必須深切的體認，不然在研究極其抽象的數學理論時，會令人認爲數學只是符號的邏輯遊戲而已。

當我們了解數學家如何發展一支數學體系及公設系統所予數學家的簡便之處。我們研究群時就必須去學習數學家在發展這個數學體系（群）的過程如何？所用的方法是什麼？有些什麼觀念要定義？它帶給人們的好處是什麼？這都是我們要加以注意的。因爲當我們翻開近代的許多論文，可以發現許多學者在推導一支數學體系時，以群的方法爲模式。事實上我們看看環（ring）、體（field）推導的方式幾乎與群的推導方式類似。例如：subgroup → subring, normal group → ideal, quotient group → quotient ring。等類同之處。

在群的歷史背景中，我們知道了群是因爲什麼的需要而興起，也知道數學家自許多數學體系中抽象化而建立了群的公設系統。群的發展使得代數向前邁進一大步，更使許多對稱問題迎刃而解，群的理論是現代數學上一個非常重要的課題。

我們結合了以上各部份的論述，我們可以發現數學上任何理論的發展過程及其最終的目的如下表：



參 考 資 料

1. 數學的內容、意義及方法（徐氏基金會）
2. Mathematical Thought from Ancient to Mordern（凡異出版社）
3. The Structure of Algebra.（中央圖書出版社）
4. The Process of Learning Mathematical. Chapman. L.R.
5. Abstruct Algebra（Buton 東南書局）
6. The Significant of Mathematics.

——本文作者現就讀於師範學院數學系