數學理論

簡易線性代數(三)

線性空間

賴漢卿

在第一章我們看過矩陣的形成，在同類型之矩陣中，有一種加法及乘以某常數，其結果還是原同類型，因此同類型矩陣的集合，我們稱它是一個綫性空間、或是抽象的向量空間，綫性空間的每一個元素稱爲向量。本章主要目的是就一般綫性空間來討論其基底，維度及子空間的性質。

§3.1 綫性（向量）空間—— 綫性相關與綫性獨立

在前兩章中，我們都直接講2維向量，3維向量以及n維向量。一般就n個數爲一組：$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$之數系全體就是$n$維向量，這些向量的和及乘以純量倍$\lambda$，通常定義如下：

設$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$\lambda$爲一數，則

$$(3.1)\quad \begin{aligned} x+y&=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n) \\ \lambda x&=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

（3.1）的運算也稱爲綫性運算。此外有關這種向量的運算還滿足一些法則，像這種向量x所形成之集合，我們稱它爲向量空間或綫性空間，綫性種稱呼來自其運算滿足綫性之故。如前述n個數若都由實數所成的數系，則記成R^n；若都由複數所成的數系則記成C^n。特別於$n=1$時，$R^1=R$就是實數空間，$C^1=C$是複數空間。由R^n或C^n引導出一般向量空間之概念。其定義如下：

定義1：一集合V的元素爲$x, y, z, \cdots$，V稱爲佈於一體F（通常取$F=R$或C）的向量空間或稱爲綫性空間，即在V中定義有下列的運算

(a) 對於任意兩元x，$y\in V$，必對應有一元$z\in V$稱爲x與y的和，記爲$x+y$。

(b) 對於每一元$x\in V$與體F中之一元素λ，必對應有一元，記爲λx，稱爲x的純量倍λ積，換句話說：

(a) 若x，$y\in V$，則$x+y$有定義且$x+y\in V$

(b) 若$x\in V$，$\lambda\in F$，則λx有定義且$\lambda x\in V$

以上之運算尙滿足下面法則，

Ⅰ ① $x+y=y+x$

② $(x+y)+z=x+(y+z)$

③ V含有零元素使$x+0=x$，對任何$x\in V$都成立，此0稱爲零元素

④ 對每個$x\in V$，必存在一元素y（記爲$-x$）$\in V$使得 $x+(-x)=0$

Ⅱ ① $1\cdot x=x$

② $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$， $\alpha, \beta\in F$

Ⅲ $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$， $\alpha, \beta\in F$

當$F=R$時，V稱爲實數綫性空間。

當$F=C$時，V稱爲複數綫性空間。

滿足條件Ⅰ的集合V，稱爲加法群。

綫性空間的每一個元素稱爲向量。

R^n 是佈於R的綫性空間，C^n 是佈於C（或是佈於R）的綫性空間。

現在我們再定義在綫性空間的綫性獨立及綫性相關的向量組以及其維度等，這些都是學綫性數學的最基本而且重要的概念。

定義 2：設V爲綫性空間，我們稱向量x，y，z，…，v等向量爲綫性相關即存在不全爲 0 之數α，β，γ，…θ，等使得

(i)　$\alpha x+\beta y+\gamma z+\cdots+\theta v=0$

非綫性相關的向量組，則稱它們爲綫性獨立。換句話說，一組向量x，y，…v被稱爲綫性獨立即

(ii)　$\alpha x+\beta y+\cdots+\theta v=0$ 時必使$\alpha=\beta=\cdots=\theta=0$

如果向量x，y，…，v爲綫性相關，則至少在(i)中有一係數，比如說是α，不爲 0，於是我們可解得x而表示成

$$x=-\frac{\beta}{\alpha}y-\frac{\gamma}{\alpha}z-\cdots-\frac{\theta}{\alpha}v$$

令

$$-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda,\ -\frac{\gamma}{\alpha}=\mu,\ \cdots,\ -\frac{\theta}{\alpha}=\delta$$，則得

(i)　$x=\lambda y+\mu z+\cdots+\delta v$

(i) 式之右端稱爲y，x，…，v等向量的綫性結合。

因此在一組綫性相關的向量中，必有一向量可寫成其餘向量的綫性結合來表示。

定義 3：一向量空間V稱爲n維（度）的意思是V包含有n個綫性獨立之向量，但任何$n+1$個向量爲綫性相關。此時這n個綫性獨立之向量，稱爲向量空間V的基底。

無限維（度）空間不準備在本講義中敍述，故我們都暫避討論無限維向量空間。

在第一章裡我們曾經提到n維向量$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$ 可用$e_1=(1,0,\cdots,0)$ $e_2=(0,1,0,\cdots,0)$，…，$e_n=(0,\cdots,0,1)$的綫性結合寫成

$$a=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$$

這裡的e_1，e_2，…，e_n 是綫性獨立，故在n維空間是組成一個基底。而R^n 之爲何稱爲n維當不難意味其理由。

注意——綫性空間的基底並不是唯一。

本講篇所討論的綫性空間大都以$V=R^n$ 爲立，其實形成綫性空間的方式很多不過都與R^n 同構（其意義看下面），我們且看下面諸例。

例 1：關於n個獨立變數x_1，x_2，…，x_n之整式

$$f=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

的全體是一個綫性空間（讀者自證其爲什麼？），而1，x_1，x_2，…，x_n爲綫性獨立。任意f都是由這些元素的綫性結合所成，故這種綫性空間是$n+1$維，而 1，x_1，x_2，…，x_n爲此空間的基底。a_0，a_1，…，a_b稱爲f的成分，以 1，x_1，x_2，…，x_n 爲基底所成之綫性空間（即f的全體）與由（a_0、a_1，…，a_n）所成之$n+1$維列向量空間是同構的（即維數相等，代數結構是一對一對應）。故雖然此綫性空間不是R^{n+1}_n，但可視同爲R^{n+1}來處理。

例 2　複數$x+iy$所成之集合也是一種綫性空間，任意元素$x+iy$都是由

1　與　i

的綫性結合所成。由即將看到的下面定理 1，知此空間是 2 維且以 1 與i爲基底，而x，y爲其成分，於是 2 維向量空間（複數空間C）與（x，y）之空間同構。即C與R^2可說相同。

例 3：矩陣 $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ 的全體也成爲一綫性空間。（讀者應試證其滿足綫性空間的條件），且注意 x，y 之相關位置，這是一個 2 維的綫性空間，事實上與向量（ x，y ）之空間同構，若 x，y 表示實數，則此空間與 R^2 同構。

也許讀者對於同構的意義有點陌生，我們借這個例題來說明同構的眞義：設 x，y 表實數，則（ x y ）$\in R^2$，

若 $\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ 表該空間之兩元素分別對應於（ x_1，y_1 ）與（ x_2，y_2 ），其代數運算是：

(i) $\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2) & -(y_1+y_2) \\ (y_1+y_2) & (x_1+x_2) \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

(i) $\lambda \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & -\lambda y_1 \\ \lambda y_1 & \lambda x_1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (\lambda x_1,\ \lambda y_1)$

故謂之同構。

如果一般的兩綫性空間 V 與 U，稱之爲同構即 V 與 U 爲一對一之集合，且

$$a,\ b\in V,\qquad x,\ y\in U$$

$$a \leftrightarrow x,\qquad b \leftrightarrow y \text{ 時，則}$$

$$\begin{cases} a+b \leftrightarrow x+y \\ \lambda a \leftrightarrow \lambda x \end{cases}$$

再舉一個綫性空間的例子：

例 4：$m\times n$ 矩陣 $A=(a_{ij})$（ $i=1,2,\cdots m$；$j=1,2,\cdots,n$ ）的全體是一綫性空間。如果第（ i，j ）元素爲 1，其餘元素爲 0 的矩陣用 E_{ij} 表示，則 $m\times n$ 型矩陣 A 都可寫成

$$(3.2)\qquad A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

這樣你可以看出 A 是由 E_{ij}（ $i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$ ）的綫性結合表示出來，且若 $A=0$ 時，每個 $a_{ij}=0$（ $i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$ ）故知

$$E_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

爲綫性獨立，這裡矩陣爲綫性獨立的意思是：矩陣的綫性結合爲零矩陣時，其係數 a_{ij}（ $i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$ ）都是 0。

因此由下面將敍述的定理 1（綫性結合與綫性相關之定理）知此 $m\times n$ 型矩陣空間爲 mn 維空間，且其基底爲 E_{ij}，a_{ij}（ $i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$ ）爲其成分。這也說明了此空間與 R^{mn} 同構，（如果 a_{ij} 都是實數的話）。

由前面諸例，我們知道綫性空間的意義很廣，不只限於 R 或 R^n，但都與某 R^n 同構。

下面的定理是關於綫性結合的綫性相關性定理，在綫性代數之理論中，其具本質上的效用。

定理 3.1：設向量 y_1，y_2，$\cdots$，y_k 爲綫性獨立，其綫性結合所得之向量有 x_0，x_1，$\cdots$，x_m，且於 $m\geq k$ 時，x_0，x_1，$\cdots$，x_m 爲綫性相關。

證明：對於 $m=k$ 來證明已足夠（爲什麼？）。我們利用數學歸納法來證明。

若 $k=1$ 時，則因 $x_0=c_1y_1$，$x_1=c_2y_1$，所以 $c_2x_0-c_1x_1=0$，這個等式示明了 x_0，x_1 爲綫性相關（注意定義的意味）。

今對於 $k=m-1$ 時，設命題爲眞，則因 y_1，y_2，$\cdots$，y_m 爲綫性獨立，可令

$$x_0=c_{01}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{mm}y_m$$

$$x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1m}y_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_m = c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \cdots + c_{mm}y_m$$

然後證明 x_0 ，x_1 ，…，x_m 爲綫性相關即可。如果 c_{01} ，c_{11} ，… c_{m1} 都是 0 ，而因 x_0 ，x_1 ，…，x_m 爲 y_2 ，y_3 ，…，y_m 之綫性結合，則依歸納法的假設是綫性相關。如果有一不爲 0 ，設此不爲 0 之係數爲 c_{01}（$\neq 0$），則最初之式子可寫作

$$y_1 = \frac{1}{c_{01}}x_0 - \frac{c_{02}}{c_{01}}y_2 - \cdots - \frac{c_{0m}}{c_{01}}y_m$$

將這個結果代入其他各式得

$$x_1 - \frac{c_{11}}{c_{01}}x_0 = \left(c_{12} - \frac{c_{11}c_{02}}{c_{01}}\right)y_2 + \left(c_{13} - \frac{c_{11}c_{03}}{c_{01}}\right)y_3 + \cdots + \left(c_{1m} - \frac{c_{11}c_{0m}}{c_{01}}\right)y_m$$

$$x_2 - \frac{c_{21}}{c_{01}}x_0 = \left(c_{22} - \frac{c_{21}c_{02}}{c_{01}}\right)y_2 + \left(c_{23} - \frac{c_{21}c_{03}}{c_{01}}\right)y_3 + \cdots + \left(c_{2m} - \frac{c_{21}c_{0m}}{c_{01}}\right)y_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_m - \frac{c_{m1}}{c_{01}}x_0 = \left(c_{m2} - \frac{c_{m1}c_{02}}{c_{01}}\right)y_2 + \left(c_{m3} - \frac{c_{m1}c_{03}}{c_{01}}\right)y_3 + \cdots + \left(c_{mm} - \frac{c_{m1}c_{0m}}{c_{01}}\right)y_m$$

這些式子的左邊 m 個向量，以 $m-1$ 個綫性獨立之向量 y_2 ，y_3 ，…，y_m 的綫性結合表示出來，依歸納法的假設，此 m 個向量爲綫性相關。因此沒什麼可多說明的知道存在不全爲 0 之 c_1 ，c_2 ，…，c_m 使

$$c_1\left(x_1 - \frac{c_{11}}{c_{01}}x_0\right) + c_2\left(x_2 - \frac{c_{21}}{c_{01}}x_0\right) + \cdots + c_m\left(x_m - \frac{c_{m1}}{c_{01}}x_0\right) = 0$$

令 $c_0 = -c_1\dfrac{c_{11}}{c_{01}} - c_2\dfrac{c_{21}}{c_{01}} - \cdots - c_m\dfrac{c_{m1}}{c_{01}}$ ，由上式整理便得 $c_0x_0 + c_1x_1 + \cdots + c_mx_m = 0$

故 x_0 ，x_1 ，…，x_m 爲綫性相關。　　　　（證明畢）

下面幾個定理都很容易由定義證明出來

定理 3.2：設 a_1 ，a_2 ，…，a_n 爲綫性獨立，而 a_1 ，a_2 ，… a_n ，b 爲綫性相關，則 b 可用 a_1 a_2 ，… a_n 的綫性結合唯一地表示出來。

證明：留做練習題

定理 3.3：若 a_1 ，a_2 ，…，a_n 爲綫性獨立，且

$$\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \cdots + \lambda_na_n = \mu_1a_1 + \mu_2a_2 + \cdots + \mu_na_n$$

時，則 $\lambda_1 = \mu_1$ ，$\lambda_2 = \mu_2$ ，…，$\lambda_n = \mu_n$

證明：已知等式移項，利用定義便得

例 5：試證明向量 $a = (0, 1, 2)$ ，$b = (2, 1, 3)$ ，$c = (3, 0, 1)$ 爲綫性獨立

證明：設 $\lambda a + \mu b + \upsilon c = 0$ ，則

$(0\lambda + 2\mu + 3\upsilon,\ \lambda + \mu + 0\upsilon,\ 2\lambda + 3\mu + \upsilon) = (0, 0, 0)$ 所以　$2\mu + 3\upsilon = 0$ ，$\lambda + \mu = 0$ ，$2\lambda + 3\mu + \upsilon = 0$ 。以 λ ，μ ，υ 爲未知數來考慮其係數行列式時，因有

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

故此齊性綫性聯立方程組之解只有 $\lambda = \mu = \upsilon = 0$ ，換句話說 a ，b ，c 等爲綫性獨立。

例 6：試證明下面三向量爲綫性相關

$$x = (1, 2, 7),\ y = (-2, 5, 4),\ z = (-1, 4, 5)$$

並以 y ，z 表出 x ，

解：設 $\lambda x+\mu y+\upsilon z=0$，則得聯立方程式組 $\lambda-2\mu-\upsilon=0$，$2\lambda+5\mu+4\upsilon=0$，

$7\lambda+4\mu+5\upsilon=0$　其係數行列式：

$$\triangle=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 5 & 4\\ 7 & 4 & 5\end{vmatrix}=0$$

因此該齊性一次聯立方程組有異於（0，0，0）組之解，其解由下面不定方程組來決定：

$$\lambda-2\mu-\upsilon=0,\qquad 2\lambda+5\mu+4\upsilon=0$$

於是求得　$\lambda:\mu:\upsilon=1:2:-3$

即　$\lambda=k$，$\mu=2k$，$\upsilon=-3k$

因此

$x+2y-3z=0$，即 $x=3z-2y$

§3.2　子空間或部分空間

設 V 爲 n 維綫性空間，W 爲 V 的子集合，如果 W 本身滿足綫性空間的公理，則稱 W 爲 V 的子空間或部分空間，並以 $W\subset V$ 表示。例如平常的空間來說，通過原點的平面或直綫上之向量全體是空間的子空間。

子空間旣是綫性空間，則具有其基底與維度。

一組向量給定後，我們都常考察由這些向量所生成（或說編織）的子空間較多，這種子空間如下定義之：

在空間 V 中之綫性獨立或綫性相關的一向量系 a_1，a_2，…，a_m 給定時，這些向量之綫性結合的全體

$$\{c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_ma_m\}$$

乃成爲 V 的子空間是不難知道的，這種子空間稱爲由向量 a_1，a_2，…，a_m 所編織而成。

像這樣所得子空間的維度稱爲向量系 a_1，a_2，…，a_m 的階數（或稱之爲秩）。向量系的階數是含在該系中綫性獨立的向量個數之最大者。

由零向量所成的集合也是一個子空間，這個空間的維度視着0維。

給與空間 V 中之二個子空間，自然就可考慮其交集及和的空間。

如果 P，Q 爲 V 的兩個子空間，其和空間爲：

(3.3)　$\{p+q\mid p\in P,\ q\in Q\}\to P+Q$

這個和空間是由 P 及 Q 的基底所生成的子空間。又 P 與 Q 之交集 $P\cap Q$ 所成的子空間稱爲交集空間。

例如在3維空間中之兩平面（都是2維子空間）之交集爲一直綫（一維子空間），但和空間則爲整個空間。

下面我們來觀察 P，Q 之維度與 $P+Q$ 及 $P\cap Q$ 的維度之間的關係。對任意空間 V 的維度，我們用 $dimV$ 表示。

定理3.4：$dim P+dim Q=dim(P+Q)+dim(P\cap Q)$

證明：設 $P\cap Q$ 的基底爲 a_1，a_2，…，a_κ，這個基底用適當的向量來補充

$$(a_1,a_2,\cdots a_\kappa,b_1,b_2,\cdots b_l)$$

$$(a_1,a_2,\cdots a_\kappa,c_1,c_2,\cdots c_m)$$

分別設爲 P 與 Q 的基底，則當然

$$dim P=k+\ell,\quad dim Q=k+m,\quad dim(P\cap Q)=k$$

於此我們要證明

① $\{a_1,a_2,\cdots a_\kappa,b_1,b_2,\cdots b_l,c_1,c_2,\cdots,c_m\}$ 是 $P+Q$ 的基底。要是如此則能得

$$\dim(P+Q)=k+\ell+m=(k+\ell)+(k+m)-k$$
$$=\dim P+\dim Q-\dim(P\cap Q)$$

因而本定理便得證

今由①之向量作綫性結合，置成

② $(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_\kappa a_\kappa)+(\mu_1b_1+\cdots+\mu_lb_l)+(\upsilon_1c_1+\cdots+\upsilon_mc_m)=0$

只要證明②的各係數爲0即可。由②

$$(\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_\kappa a_\kappa)+(\mu_1b_1+\cdots+\mu_lb_l)=-\upsilon_1c_1-\cdots-\upsilon_mc_m$$

左邊是P的向量　故

③ $-(\upsilon_1c_1+\cdots+\upsilon_mc_m)\in P$

但原先　$-(\upsilon_1c_1+\cdots+\upsilon_mc_m)\in Q$，故知

$$-(\upsilon_1c_1+\cdots+\upsilon_mc_m)\in P\cap Q$$

因此上面這個向量應該由$P\cap Q$的基底之綫性結合表出，即

$$-(\upsilon_1c_1+\cdots+\upsilon_mc_m)=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_\kappa a_\kappa$$

即　$\alpha_1a_1+\cdots+\alpha_ka_k+\upsilon_1c_1+\cdots+\upsilon_mc_m=0$

但a_1，a_2，…，a_k，c_1，c_2，…，c_m爲綫性獨立，故上式之各係數應該都是0，結果②就變成

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ka_k+\mu_1b_1+\cdots+\mu_lb_l=0$$

又因a_1，…，a_k，b_1，…，b_k爲綫性獨立，故上式之各係數也都是0，結果②所表示之各係數

λ_1，…，λ_k，μ_1，…$\mu\ell$，υ_1，…，υ_m　都是0

也就是說①所示之向量爲綫性獨立。

其次證明$P+Q$之任意一元素$V=V_1+V_2$，$V_1\in P$，$V_2\in Q$，都解用①之元素的綫性結合表出即可。蓋因

V_1爲a_1，…a_R，b_1，b_2，…b_l　之綫性結合

V_2爲a_1，…a_R，c_1，c_2，…c_m　之綫性結合

故V可用定理3.1的結果，以①的各向量之綫性結合來表示，換句話說①是$P+Q$的基底，故定理得證。

這個定理的特殊情形可說明關於特殊情況之空間的相交結論來。如在4維空間中，不相同之平面(即2維子空間)一般只能交於點(即兩平面相交之維度是0)。兩個平面能交於直綫的情形只限於向量和空間及3維子空間(即兩平面置入某3種空間)。事實上這種情形是

$$\dim P+\dim Q=2+2=4$$
$$\dim(P\cap Q)=1$$

故只有　$\dim(P+Q)=3$的情形。

例6：設在3維空間V中，P爲由$a=(1,2,-1)$，$b=(1,0,2)$，$c=(-1,4,-8)$所生成的子空間，Q爲形如$(x_1,0,x_3)$之向量全。則a、b爲綫性獨立，但a，b，c爲綫性相關，且$c=2a-3b$，因此P實際上是由a及b所生成，這是一個2維空間，其向量爲形如

$$\lambda a+\mu b=(\lambda+\mu,2\lambda,-\lambda+2\mu)$$

其中$\lambda=0$之向量，即μb含在Q中。故

$$P\cap Q=\{\text{由}b\text{所生成}\}$$

在幾何意義來說，這是過原點的一條直綫。而Q顯然含$e_1=(1,0,0)$，$e_3=(0,0,1)$　且

$$a-e_1+e_3=2e_2$$

故　$P+Q$含e_1，e_2，e_3，因此

$$P+Q=V$$

從上面的說明可以知道

$dim P = 2$ ，$dim Q = 2$ ，$dim(P+Q) = 3$ ，$dim(P \cap Q) = 1$

特別是 $P \cap Q$只包含0向量時，則能使$dim V = dim P + dim Q$成立時爲$dim(P+Q) = dim V$此時即

$$V = P + Q$$

這個意思是對任意$U \in V$，都可唯一地分解成

$$V = V_1 + V_2 \text{ , } V_1 \in P \text{ , } V_2 \in Q$$

這個理由很容易看出來，蓋若有兩種分解法

$$V = V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$$

則 $V_1 - V_1' = V_2 - V_2'$ ， 但 $P \cap Q = \{0\}$，故$V_1 = V_1'$ ，$V_2 = V_2'$ 。像這種分解（*）稱V可以分解成P與Q的直和（direct sum），常記爲：

（3.4） $V = P + Q$

問：在3維空間中，S是由$a = (1, 1, 1)$，$b = (2, 3, 0)$所生成立子空間，T爲$(0, x, y)$之向量全體，試問$S \cap T$與$S + T$ 之維度各爲何

答：$dim S \cap T = 1$，$dim S = 2 = dim T$ ，$dim(S+T) = 3$ 。

下面我們列出本次所講的一些題目，以供讀者練習

練習題：

1. ① 試證明向量$a = (a_1, a_2, a_3)$，$b = (b_1, b_2, b_3)$，$c = (c_1, c_2, c_3)$爲綫性獨立的充要條件爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

② 利用①的結果示明$a = (1, 0, 1)$，$b = (0, 2, 2)$，$c = (3, 7, 1)$爲綫性獨立

2. ① 當給定向量$a = (1, 2, 1)$時，試求適當的二個向量，使三個向量成爲綫性獨立。

② 除了向量$a = (1, 1, 1)$，$b = (3, 1, 1)$外，再找一個向量使此三個向量爲綫性獨立。（註：三個綫性獨立的向量，在三維空間中都可做爲基底向量，$e_1 = (1, 0, 0)$，$e_2 = (0, 1, 0)$，$e_3 = (0, 0, 1)$是三種空間的標準基底）

3. 試問下面三個向量有什麼關係？

$a_1 = (1, 2, 3)$，$a_2 = (-2, 5, -1)$，$a_3 = (3, -3, 4)$

4. ① 試將向量$a_4 = (71, 73, 19)$用$a_1 = (1, 1, 1)$，$a_2 = (2, 1, 2)$，$a_3 = (3, 4, -1)$之綫性結合表示出來。

② 在①中之a_4不能用$b_1 = (1, 5, 5)$，$b_2 = (1, 3, 1)$，$b_3(-1, -7, -9)$的綫性結合表示，試證明之。

5. 設x_2、x_3爲任意常數，所有向量$x = (0, x_2, x_3)$的集合爲A，由$c = (1, 2, 0)$，$b = (3, 1, 2)$的綫性結合所成之集合爲B，試求$A \cap B$的名量。

6. 試證明下面各題之n個向量爲綫性獨立。

① n階方陣$A = (a_{ij})$之列向量。但設$a_{ij} = 0$（$i < j$），$a_{ii} \neq 0$

② $(1, a_i, a_i^2, \cdots a_i^{n-1})$（$i = 1, 2, \cdots, n$）。但所有$a_i$都是相異之數。

③ $A^m x$（$m = 0, 1, 2, \cdots, n-1$）。但A爲n階方陣且$A^{n-1} \neq 0$，$A^n = 0$，而x是使$A^{n-1} x \neq 0$之n維向量。

7. 向量a_1，a_2，$\cdots$，a_m爲綫性獨立時，令$a = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_m a_m$，則使$a - a_1$，$a - a_2$，$\cdots a - a_m$成綫性獨立之充要條件爲

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_m \neq 1$$

試證明之，

8. 向量 a_1，a_2，…，a_m 爲綫性相關，其中任何 $m-1$ 個向量爲綫性獨立時，則有下列關係式

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_m a_m = 0\ (\ c_i \neq 0\ ,\ i = 1\ ,\ 2\ ,\cdots ,\ m\ )$$

，且除了公因數外，c_1，c_2，…，c_m 是唯一確定的，試證明之。

9. 請問行向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是否爲綫性獨立？

10. 向量 a_1，a_2，…，a_n 若爲綫性獨立，則 a_1，a_1+a_2，…，$a_1+a_2+\cdots+a_n$ 也是綫性獨立，試證明之。

11. 在 3 種綫性空間 V 的基底爲（v_1，v_2，v_3），若向量 v 的坐標爲（a_1，a_2，a_3）時，關於基底（v_1，v_1+v_2，v_2+v_3）的坐標如何？

12. 在 4 維空間的向量爲 $x=(\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ )$ 中，以能滿足 $x_1=x_2-x_3$，$x_3=x_4$ 之條件的向量所生成的子空間的一基底是什麼？

13. 試證明 $n-1$ 次以下之整式所成之空間中，1，$x-a$，$x(x-a)$，$x^2(x-a)$，…，$x^{n-2}(x-a)$ 是一組基底。且求此空間的元素 $P(x)$ 關於此基底的第一個成分。

14. 在 n 維向量空間中，下面向量系

$a_1=(\ 1\ ,\ 1\ ,\cdots ,\ 1\ )$，$a_2=(\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\cdots ,\ 1\ )$，…，$a_n=(\ 0\ ,\ 0\ ,\cdots ,\ 0\ ,\ 1\ )$ 是一基底，且求 $x=(\ x_1\ ,\ x_2\ ,\cdots ,\ x_n\ )$ 關於此新基底的成分。

15. 在 2 次以下的整式所成的空間中，試證明

(1)　$\{\ 1\ ,\ x-1\ ,\ (x-1)^2\ \}$，(2)　$\{\ x-1\ ,\ x+1\ ,\ x^2+2x\ \}$

都是基底。且求 $a_0+a_1x+a_2x^2$ 關於那些基底的成分。

爲了便於理解，我們列出上面這些練習題的略解及相關概念的說明。當讀者試想過各題後，可參考其略解。

略解：

1. ① 此三向量作成平行六面體，其體積就是此三向量所成的行列式。行列式不爲 0 表示體積不爲 0，其幾何意義表明三向量不在同一平面上，這就是三向量爲綫性獨立之眞正意味。

　令　$\lambda a+\mu b+\upsilon c=0$ 而導出 $\lambda=\mu=\upsilon=0$ 亦可得其條件，參照例 2

② 直接計算行列式，示明其値不爲 0。

2. ① 求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 之（x_2，y_2，z_2），（x_3，y_3，z_3）

如 $x_2=0$，$x_3=0$ 來考慮，可求得一解爲（0，1，0），（0，2，1）

② 求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 之（x_3，y_3，z_3）。於此考慮

如 $x_3=0$，$y_3=0$，則（0，0，1）爲其一解，

3. 綫性相關，且 $a_1=a_2+a_3$

4. ① $a_4=10\,a_1+11\,a_2+13\,a_3$

② 由①，以 λ，μ，υ 作成聯立一次方程式

$$\begin{cases} 71 = \lambda + \mu - \upsilon \\ 73 = 5\lambda + 3\mu - 7\upsilon \\ 19 = 5\lambda + \mu - 9\upsilon \end{cases}$$

示明此方程組無解。

5. 由 $x = \lambda a + \mu b$ 導出

$0 = \lambda + 3\mu$，　$x_2 = 2\lambda + \mu$，　$x_3 = 2\mu$

於是　$\lambda = -3\mu$，　$x_2 = -5\mu$，　$x_3 = 2\mu$ 而得　　答：$(0, -5\mu, 2\mu)$

6. ① 令 $x_1(a_{11}, 0, \cdots, 0) + x_2(a_{21}, a_{22}, 0, \cdots, 0) + x_3(a_{31}, a_{32}, a_{33}, 0, \cdots, 0) + \cdots\cdots + x_n(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}) = 0$

則得

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n &= 0 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

之係數行列式 $\neq 0$ 於是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$　便證明了其爲綫性獨立。

② 因

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \pi(a_i - a_j) \neq 0 \quad n \geq i > j \geq 1$$

故如同前顯爲綫性獨立

③ 令 $c_0x + c_1Ax + c_2A^2x + \cdots + c_{n-1}A^{n-1}x = 0$，兩邊乘 A^{n-1}，則因 $A^n = 0$，所以 $c_0A^{n-1}x = 0$。但 $A^{n-1}x \neq 0$，故 $c_0 = 0$ 又用 A^{n-2} 來乘則可導出 $c_1 = 0$。依次做下去使得 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$　故 $A^m x$ $(m = 0, 1, \cdots, n-1)$ 爲綫性獨立。

7. 設 $\alpha x_1(a - a_1) + \alpha x_2(a - a_2) + \cdots + \alpha x_m(a - a_m) = 0$ 以 $a = c_1a_1 + \cdots + c_ma_m$ 代入，則由 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 爲綫性獨立知

$$\begin{aligned} &\alpha_1(c_1 - 1) + \alpha_2c_1 + \cdots + \alpha_mc_1 = 0 \\ &\alpha_1c_2 + x_2(c_2 - 1) + \cdots + \alpha_mc_2 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha_1c_n + \alpha_2c_n + \cdots + x_m(c_m - 1) = 0 \end{aligned}$$

而　$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ 之充要條件爲

$$0 \neq \begin{vmatrix} c_1 - 1 & c_1 & \cdots & c_1 \\ c_2 & c_2 - 1 & \cdots & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m & c_m & \cdots & c_m - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (c_1 + c_2 + \cdots + c_m - 1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_2 & c_2 - 1 & \cdots & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m & c_m & \cdots & c_m - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (c_1 + c_2 + \cdots + c_m - 1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{m-1}(c_1 + c_2 + \cdots + c_m - 1)$

8. 因 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 爲綫性相關，則不待說明，我們都知道存在 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ma_m = 0$$

若 $c_i = 0$，則由 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_m$ 之綫性獨立性得 $c_1 = c_2 = \cdots = c_{i-1} = c_{i+1} = \cdots = c_m = 0$．這是矛盾的現象。於是 $c_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \cdots, m$)。今再設 $c_1a_1 + \cdots + c_ma_m = 0$ 及 $c_1'a_1 + \cdots + c_m'a_m = 0$　則

$$(c_1 - kc_1')a_1 + \cdots + (c_m - kc_m')a_m = 0$$

如果 $c_m - kc_m' = 0$，則因 $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$ 爲綫性獨立，乃必使 $c_1 = kc_1', \cdots, c_{m-1} = kc'_{m-1}$。因而得知其所得之關係式爲唯一。

9. 設給與的向量以 a, b, c 表示，且令 $c_1a + c_2b + c_3c = 0$，則 $c_1 + 3c_2 = 0$，$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$，$-c_1 + c_2 - 4c_3 = 0$，$-c_1 - 2c_2 - c_3 = 0$ 滿足此聯立方程組之 c_1, c_2, c_3 有無數多，故爲綫性相關。

10. 置　$c_1a_1 + c_2(a_1 + a_2) + \cdots + c_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$　則得

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)a_1 + (c_2 + c_3 + \cdots + c_n)a_2 + \cdots + c_na_n = 0$$

但 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲綫性獨立，故

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0,\ c_2 + c_3 + \cdots + c_n = 0,\ \cdots,\ c_n = 0$$

因此　$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$，故　$a_1, a_1 + a_2, \cdots, a_1 + \cdots + a_n$ 爲綫性獨立。

11. $\nu = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3$

$= x_1v_1 + x_2(v_1 + v_2) + x_3(v_2 + v_3)$

$= (x_1 + x_2)v_1 + (x_2 + x_3)v_2 + x_3v_3$

故　$x_1 + x_2 = \alpha_1$，$x_2 + x_3 = \alpha_2$，$x_3 = \alpha_3$，於是求得

$$x_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3,\ x_2 = \alpha_2 - \alpha_3,\ x_3 = \alpha_3$$

12. $x = (x_2 - x_3, x_2, x_3, x_3)$

$= (x_2 - x_3)e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_3e_4$

$= x_2(e_1 + e_2) + x_3(e_3 + e_4 - e_1)$

$= x_2(1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 1)$

13. 令　$\alpha_1 + \alpha_2(x - a) + \alpha_3x(x - a) + \cdots + \alpha_n x^{n-1}(x - a) = 0$

則得　$(\alpha_1 - a\alpha_2) + (\alpha_2 - a\alpha_3)x + (\alpha_3 - a\alpha_4)x^2 + \cdots + \alpha_nx^{n-1} = 0$

因 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 爲綫性獨立，故由 $\alpha_1 - a\alpha_2 = 0$，$\alpha_2 - a\alpha_3 = 0$，$\cdots$，$\alpha_{n-1} - a\alpha_n = 0$，$\alpha_n = 0$ 求得 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$，換句話說證明了綫性獨立性。如令 $P(x) = \alpha_1 + \alpha_2(x - (x - a) + \alpha_3x(x - a) + \cdots + \alpha_nx^{n-2}(n - a)$，則 $P(a) = \alpha_1$ 爲其第一成分。

14. 令其綫性結合式爲 0 的係數爲 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$，則得

$\alpha_1 = 0$，$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$，$\cdots$，$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$，

於是　$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$　　故令

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1(1, 1, \cdots 1) + a_2(0, 1, \cdots, 1) + \cdots + \alpha_n(0, 0, \cdots, 0, 1)$$

則　$x_1 = a_1$，$x_2 = a_1 + a_2$，$x_3 = a_1 + a_2 + a_3$，……

$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

故得　$a_1 = x_1$，　$a_2 = x_2 - x_1$，　$a_3 = x_3 - x_2$，$\cdots$，$a_n = x_n - x_{n-1}$

15. (i)令 $\alpha_1 + \alpha_2(x - 1) + \alpha_3(x - 1)^2 = 0$，　則

$$(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_2 - 2\alpha_3)x + \alpha_3x^2 = 0$$

1，x，x^2 爲綫性獨立，故由

$$\alpha_3=0,\quad \alpha_2-2\alpha_3=0,\quad \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$$

得 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$、 於是令

$$a_0+a_1x+a_2x^2=k_0+k_1(x-1)+k_2(x-1)^2$$

以 $x=1$ 代入得 $k_0=a_0+a_1+a_2$

以 k_0 代回求得 $k_1=a_1+2a_2$ （消去 x 一次）

又以 k_0，k_1 代入原式，求得 $k_2=a_2$ （消去 x 二次）

故求得之成分爲 $(a_0+a_1+a_2,\ a_1+2a_2,\ a_2)$

(2) 置 $\alpha_1(x-1)+\alpha_2(x+1)+\alpha_3(x^2+2x)=0$，

$$(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)x+\alpha_3x^2=0$$

所以 $\alpha_3=0$，$\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0$，$\alpha_2-\alpha_1=0\Rightarrow\ \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

於是 $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2=k_0(x-1)+k_1(x+1)+k_2(x^2+2x)$

比較兩邊係數，如(1)方法求得

$$(k_0,\ k_1,\ k_2)=\frac{1}{2}(x_0,\ x_1,\ x_2)\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

〔預告：下一次（第四次）談“線性變換”〕

——本文作者現任教於清大數學系