數播信箱

（1.林東棋來函）

編輯大人您好：

我是一名大專院校的學生，前些時候研讀 *Johnson and Kiokemeister*的微積分時，發現其中有一例題。求$\int sec\,x\,dx$，其解法爲令

$$u = sec\,x + tan\,x$$
$$\Rightarrow du = (\,sec\,x\,tan\,x + sec^2 x\,)\,dx$$
$$= sec\,x\,(\,sec\,x + tan\,x\,)\,dx$$
$$= u\,sec\,x\,dx$$
$$\Rightarrow (\frac{1}{u})\,du = sec\,x\,dx$$
$$\therefore \int sec\,x\,dx = \int \frac{1}{u}du \Big|_{u = sec\,x + tan\,x}$$
$$= l\,|\,sec\,x + tan\,x\,| + C$$

我個人覺得這種解法似乎太「技術」了，所以想請教編輯大人有其他較基本、實用的解法嗎？如果有，能否回信告之，晚輩先在此致最大的謝意。

學生　林東棋　敬上 70．3．2

林同學：

你所提 *Johnson* 書上關於$\int sec\,x\,dx$的解法，我想已是很簡明了，乍看之下，$u = sec\,x + tan\,x$ 的代換是有點玄，不知從那裏迸出來。其實你如果很熟悉三角函數的微分，再累積多點經驗，應會想出相同（或類似）的解法。做數學，有時就是要花點工夫“湊”出漂亮的解法。久而久之，你會對這類的問題培養出“直覺”來。　祝

好

黃啓瑞　覆

70年3月18日

（2.李明智來函）

編輯先生：

您好！學生有二個數學上的概念想請您指教，以開茅塞。

1. 0是否包含於自然數？在九章文化事業有限公司出版的「中學數學百科全書」中，18 頁提到0爲自然數中的元素。又其88 頁裏的皮亞諾公理系統，亦將0歸於自然數中，0的身分如何，願聞其詳。
2. 高中裏說，一數，除了1及本身之外的所有其它因數爲此數的眞因數。

「數學圈雜誌」裏提到「完全數」說，若一數爲其所有眞因數的和，稱爲完全數，如

$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

若依此說法，則1爲眞因數。到底1是否爲眞因數？或者1只在討論完全數時才當眞因數看待？

雖然是兩個小問題，接到您的回答，我仍然很感激！

學生　李明智　上

70年3月23日

李同學：

定義在數學裡是語言的一部份，是爲了討論數學時的方便而下的。因此定義完全是人爲的，不同的人自然可以下不同的定義，每個人也有權選用他自己認爲最適當的定義。

有些人以爲把0包含在自然數裏比較方便，有些人則不喜歡這樣。

關於1是否可以是眞因數的問題也是一樣。你定它是，它就是，你定它不是，它就不是。

于　靖　敬覆

（3.林建宏來函）

編輯先生鈞鑒：

雖然我是五專學生，但因對數學興趣濃厚，故想多讀點有關數學的書籍及雜誌，因此在前年偶然機會下，於書局買到「數季」。讀了幾期後，深感編輯先生們，非常樂意爲學生及讀者們解答疑問，且很熱心地提供一些寶貴資料及意見。今有兩個問

題，想請教編輯先生：

一、橢圓積分在一般高等微積分教本均稱其不可能以初等函數來表示它的值，必須用近似積分法或展開成無窮級數來求出。那麼此"不可能"是否有證明？若有，論文又是那位數學家寫的？那裏方可找到這類論文？

二、找了不少書局，爲什麼沒有一家書局在賣"美國數學月刊"？如果我想訂閱，又該如何呢？

以上兩個問題，敬請編輯先生能撥冗答覆，學生在此先致謝意。 敬請

編安

學生 林建宏 敬上

70年2月13日

林同學：

很高興你對數學興趣濃厚。

關於「橢圓積分不可能以初等函數來表示」，當然是可以證明的。最早給予嚴格證明的是一百多年前法國數學家 *Liouville* 。其實在十九世紀上半葉大家都已知道這一事實，譬如 *Laplace*（另一位更早的法國數學家）也給過有關的推論。

詳細證明可參看英國數學家 *Hardy* 的一本小册子（中研院數研所圖書館有）：

The Integration of Functions of a Single Variable, 1916, *Cambridge Tracts in Math and Math Physics*, *No* 2.

也許一個比證明「橢圓積分無法以初等函數表示」更有意思的方向是研究：

到底什麼樣的函數可以由橢圓積分式子裏得到？

雖然這些函數不是通常所謂的初等函數，但是它們也有很多很有意思的性質。它們的反函數包含了複數平面上的所謂雙週期函數（即橢圓函數）。這方面的討論你可以在幾乎任何一本複變函數論的書上找到，一百多年來好些數學家在這方面做了很多很多的研究。

如果所有初等函數的積分都是初等函數的話，那數學未免就太沒意思了。

關於美國數學月刊，我想因爲這是美國的數學月刊，如果你要訂閱，當然必須直接到美國去訂。國內書局裏是沒有的。不過你可以在幾乎任何一所大學數學系的圖書館裏看到這個月刊。

最近有一篇文章，介紹 *Liouville* 的積分理論及相關發展，請參閱：

T. Kasper: *Integration in Finite Terms the Liouville Theory*, *Mathematics Magazine* Vol 53, No. 4, 1980, pp. 195～201

于 靖 敬覆

（4. 葉彥伯來函）

編輯先生：

我是一名高中生，近日聽同學們提到一個求平面上圖形面積的公式：

1. 已知四點：$A(1,2)$，$B(4,0)$，$C(6,3)$，$D(3,5)$

求四邊形 $ABCD$ 之面積？

解：

$$\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\\ 6 & 3\\ 3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\times[(1\times0+4\times3+6\times5+3\times2)-(4\times2+6\times0+3\times3+1\times5)]$$

$$=\frac{1}{2}\times 26=13$$

2. 已知：$A(1,3)$，$B(2,4)$，$C(3,2)$

求：三角形 ABC 之面積？

解：

$$\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[(1\times4+2\times2+3\times3)-(2\times3+3\times4+1\times2)]$$

$$=\frac{1}{2}\times(-3)=-\frac{3}{2}$$

$$a\triangle ABC=\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$$