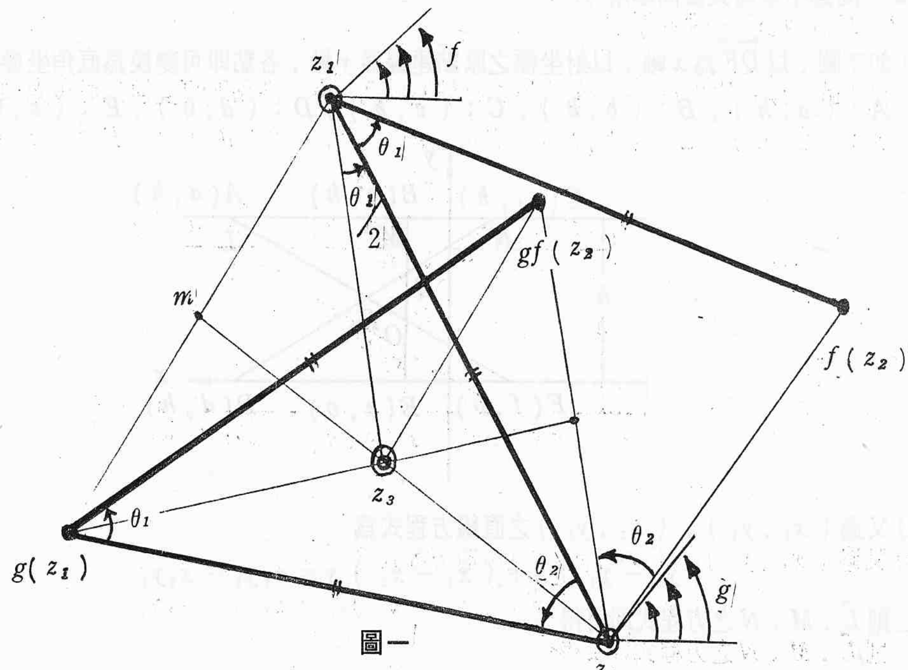
5103（台大數研所廖賀田同學解）

我們只討論 z_1，z_2 不相等的情形，以下提供二種解法，第一種是用初等平面幾何學加上一點技巧而成；第二種是利用複變數爲工具，很自然地解出。其中我們把“以 z_1 爲心，θ_1 角的旋轉”叫做 f；把“以 z_2 爲心，θ_2 角的旋轉”叫做 g，並將“以 α 爲起點，β 爲終點”的有向線段記爲 (α, β)，以 (α, β)，(α, γ) 爲兩邊的角，記爲 $\angle(\beta, \alpha, \gamma)$；以 α，β，γ 三點爲頂點的三角形記爲 $\triangle(\alpha, \beta, \gamma)$。

〔解法一〕

1. 我們追踪有向線段 (z_1, z_2) 在 f，g 之下的變化：首先 f 把 (z_1, z_2) 送到 $(z_1, f(z_2))$，接著 g 再把 $(z_1, f(z_2))$ 送到 $(g(z_1), g(f(z_2)))$，如圖一。現在希望找一個“以 z_3 爲心，θ_3 角的旋轉”h，把 $(g(z_1), g(f(z_2)))$ 送回 (z_1, z_2)。



圖一

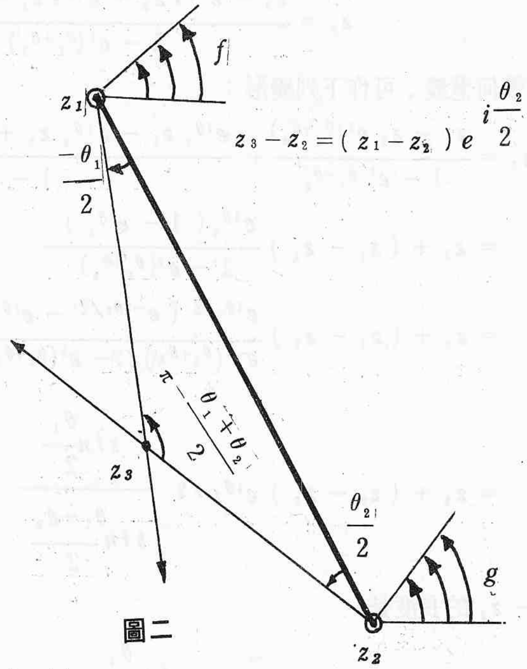
假如這樣的 h 存在，則 z_3 與 $g(z_1)$ 的距離必定等於 z_3 與 z_1 的距離，所以 z_3 必須在線段 $(z_1, g(z_1))$ 的垂直平分線上，同理，z_3 也必須在線段 $(z_2, g(f(z_2)))$ 的垂直平分線上，只要這兩條垂直平分線彼此不平行，就可唯一決定 z_3。

另外，稍加推想即知：在 h 把 $(g(z_1), g(f(z_2)))$ 送回 (z_1, z_2) 時，轉 f，轉 g，再轉 h，必定把任何一點轉回到自己。（因爲整個平面跟著 (z_1, z_2) 一起運動）。

2. 因爲 g 把 $\triangle(z_2, z_1, f(z_2))$ 送到 $\triangle(z_2, g(z_1), gf(z_2))$，所以 $\angle(z_2, g(z_1), g(f(z_2))) = \theta_1$；又 (z_2, z_1) 與 $(z_2, g(z_1))$ 等長，所以 $(z_1, g(z_1))$ 的垂直平分線會通過 z_2，且平分 $\angle(z_1, z_2, g(z_1))$；同理，$(z_2, g(f(z_2)))$ 的垂直平分線也平分 $\angle(z_2, g(z_1), gf(z_2))$。由此可知 z_3 其實是在 $\angle(z_2, g(z_1), gf(z_2))$ 及 $\angle(z_1, z_2, g(z_1))$ 的角平分線交點之上。我們又可證明 $\triangle(z_2, g(z_1), z_3) \cong \triangle(z_2, z_1, z_3)$；所以 $\angle(z_2, z_1, z_3) = \angle(z_2, g(z_1), z_3) = \theta_1/2$。

所以實作圖找 z_3 時，只要以 (z_2, z_1) 爲始邊做出旋轉 $\theta_2/2$ 角的射線，再以 (z_1, z_2) 作出反向旋轉 $\theta_1/2$ 角的射線，則此二射線的交點就是 z_3，如圖二

$$z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)\, e^{i\frac{\theta_2}{2}} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\sin\left(\pi - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$



圖二

3. $\theta_3 = \angle(z_1, z_3, g(z_1)) = 2\angle(m, z_3, g(z_1))$
$$= 2\left(\angle(z_3, z_2, g(z_1)) + \angle(z_2, g(z_1), z_3)\right)$$
$$= 2\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_1}{2}\right) = \theta_1 + \theta_2$$

所以轉回來的角度剛好是原先兩個角度的和（要注意旋轉方向，如果順時針必須取負值）。

4. h 無解的情形是在 $(z_1, g(z_1))$ 和 $(z_2, g(f(z_2)))$ 的兩條垂直平分線彼此平行的發生，也就是在 2. 中實際作圖時，兩條射線定不出交點時發生。換句話說，h 在 $(\theta_1 + \theta_2)/2$ 是平角的整數倍時無解。

〔解法二〕

$$f(z) - z_1 = e^{i\theta_1}(z - z_1)$$
$$g(z) - z_2 = e^{i\theta_2}(z - z_2)$$
$$h(z) - z_3 = e^{i\theta_3}(z - z_3)$$

欲解 z_3，θ_3 使 $h \circ g \circ f$ 爲恆等函數。

即解 z_3，θ_3 使 $h^{-1} = g \circ f$

即

$$z_3 + e^{-i\theta_3}(z - z_3) = z_2 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i\theta_2}(z_1 - e^{i\theta_1} z_1 + e^{i\theta_1} z)$$

令 $z = 0$ 即得

$$\begin{cases} z_3 - e^{-i\theta_3} z_3 = z_2 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i\theta_2} z_1 - e^{i\theta_1+\theta_2} z_1 \\ e^{-i\theta_3} = e^{i\theta_1+\theta_2} \end{cases}$$

$\therefore \quad \theta_3 = -(\theta_1 + \theta_2) + 2h\pi$

1. 在 $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = 1$ 時（即 $(\theta_1 + \theta_2)/2$ 爲平角之整數倍）

$$0 = z_2 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i\theta_2} z_1 - z_1$$

即

$$z_1 - z_2 = e^{i\theta_2}(z_1 - z_2)$$

但已設 $z_1 \neq z_2$，$\therefore e^{i\theta_2} = 1$，$e^{i\theta_1} = 1$

也就是 f，g 都是恆等函數，換句話說，只要 f 或 g 將平面搬動，h 就無解。

2. 在 $e^{i(\theta_1+\theta_2)} \neq 1$ 時

$$z_3 = \frac{z_2 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i\theta_2} z_1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)} z_1}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

3. 欲知 z_3 的幾何意義，可作下列變形：

$$z_3 = \frac{z_2 - z_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1 - e^{i\theta_1+\theta_2}} + \frac{e^{i\theta_2} z_1 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i(\theta_1+\theta_2)} z_2 - e^{i(\theta_1+\theta_2)} z_1}{1 - e^{i\theta_1+\theta_2}}$$

$$= z_2 + (z_1 - z_2)\frac{e^{i\theta_2}(1 - e^{i\theta_1})}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

$$= z_2 + (z_1 - z_2)\frac{e^{i\theta_2/2}(e^{-i\theta_2/2} - e^{i\theta_1/2})}{e^{-i(\theta_1+\theta_2)/2} - e^{i(\theta_1+\theta_2/2)}}$$

$$= z_2 + (z_1 - z_2)\, e^{i\theta_2/2}\,\frac{\sin\dfrac{\theta_1}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

就是說 $z_3 - z_2$ 的長度是

$$|z_1 - z_2| \cdot \frac{\sin\dfrac{\theta_1}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

輻角是 $\quad arg(z_1 - z_2) + \dfrac{\theta_2}{2}$

這件事可由圖二，用正弦定律證出。