

# 高一、二假期作業

## 應用數學之命題

羅添壽 新化高中

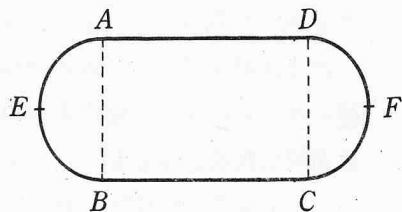
### 前言

- ① 同學們，受到各門功課的壓力，少有時間，去想，去做應用方面的數學，今筆者提供一些試題，希望同學們能夠利用假期，好好的研習之，從你的思考過程中訓練你的分析及推理能力，即使花費很多時間去研習之，亦是值得的。
- ② 此份資料教師們亦可於假期間當輔導教材。
- ③ 同學們研習之時，請不要先看解答。
- ④ 此份資料，筆者自行命題外，還參考各校段考、模擬考與聯考資料。

#### (A)高一部份

<甲> 如下圖，欲在長方形 $ABCD$ 之外側，接兩個半圓形之跑道使其周圍 $AEBCFD$ 剛好400公尺，且內部面積為10000平方公尺，試問 $AB$ 之長為若干（設圓周率為 $22/7$ ）

（註）此題注意討論



<乙> 某貨運公司寄運包裹，在標準重量內寄費相同，超重部分每公斤的寄費，則以標準重量每公斤寄費的本價，計算，現在某人要寄兩件包裹，每件皆超過標準重量，共重35公斤，若分開寄，則寄費共55元

若合寄，則寄費45元，問所定的標準重量是多少公斤又每公斤多少元？

（註）：此題為高中東華本教材第(2)冊 P58 習題3-2第10題，因教師手冊之解略繁，故特例舉之

<丙> 設有甲、乙、丙三種名貴的鳥共100隻，其中甲有 $x$ 隻，乙有 $y$ 隻，丙有 $z$ 隻，每種的售價甲一隻10元，乙一隻60元，丙一隻200元，今鳥共價2000元，求甲、乙、丙三種鳥各幾隻。

<丁> 設 $x$ 表車行走之距離，以公里為單位， $y$ 表車行走之時間以分鐘為單位， $z$ 表車資以新台幣元為單位，吾人定“計時程車”的車資收費情形如下：

計程收費表  $z = f(x)$

$$0 < x < 1 \quad z = 22$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2} \quad z = 22 + 4.5$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \quad z = 22 + 2 \times 4.5$$

$$2 \leq x < \frac{5}{2} \quad z = 22 + 3 \times 4.5$$

-----

$$\frac{n}{2} \geq x \leq \frac{n+1}{2} \quad z = 22 + (n-1) \times 4.5$$

計時收費表（耗油的時間收費表） $z = g(y)$

$$0 < y < \frac{3}{2} \quad z = 5$$

$$\frac{3}{2} \leq y < \frac{5}{2} \quad z = 5 + 1.5$$

$$\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{7}{2}$$

$$z = 5 + 2 \times 1.5$$

$$\frac{2n+1}{2} \leq y \leq \frac{2n+3}{2}$$

$$z = 5 + (n-1) \times 1.5$$

且定“計時程車”之車速平均每小時 50 公里， $z = f(x) + g(y)$ 。

今某君自天母搭“計時程車”至建中行程 25.3 公里費時 40 分 40 秒，問某君應付車資為\_\_\_\_\_。

若行程為 25 公里，費時 40 分 30 秒，而該君應付車資為\_\_\_\_\_。

(註)：此題為建中高一段考試題

<戊> 某團體計有會員 1000 人，欲互選 7 人作為委員，一人一票，以票數最多之前 6 名當選，問一人在獲得至少多少票以上，則可確定當選了？

<己> 現在颱風中心在氣象台 A 之正西 300 公里處，颱風以每小時 40 公里之速率向東北方向直進，自其中心起半徑 250 公里以內均為颱風圈內，問：  
從現在起幾小時後氣象台 A 即在颱風圈內，又氣象台 A 在颱風圈內之時間共為幾小時。

<庚> 在某次團體活動，擬從參加的人 (100 人以上) 收費，若每人收 45 元，則全部費用不夠 460 元，若每人收 50 元，則最後一人應繳費用少於 50 元，求參加人數。

<辛> 設老羅自台南往返南港兩地去程每小時  $m$  公里，回程每小時  $n$  公里，求其平均時速為何，並求與  $m, n$  之關係。

<壬> 如下圖中將自然數排列之，以  $a_{ij}$  表在第  $i$  行，第  $j$  列之數，回答下列各問：

①  $a_{ij} = 1490$  求  $(i, j)$

② 求  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$  (以  $n$  表之)

第一行  
第二行  
第三行  
第四行

第一列	1	2	6	7	15	16	28	29
第二列	3	5	8	14	17	27	30	
第三列	4	9	13	18	26	31		
第四列	10	12	19	25	32			
	11	20	24	33				
	21	23	34					
	22	35						
	36							

(註)：① 此題在訓練學生之分析試題之能力。

② 此題是分群數列與差階數列之試題，一般學生對這種試題缺乏思考研討之精神，特舉之供參考。

<癸> 某入將 53 萬元存入甲銀行，每期 (一年) 利率 6% 計算，又將另 50 萬元存入乙銀行，每期 (四個月) 利率 2% 計算，則至少幾年後乙銀行的本利和將超過甲銀行之本利和，但  $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771, \log 1.06 = 0.253, \log 1.02 = 0.0086$ 。

<子> 設某一種細菌每隔 20 分鐘分裂一次 (1 個分成 2 個)，今有 25 個細菌，經若干時間後，其個數超過 100 萬個，則至少需時\_\_\_\_\_，但  $\log 2 = 0.3010$ 。

<丑> 今規定於每年之一月一日散佈定量之農藥於土壤中知此藥品會慢慢分散但經一年後乃有 90% 殘留。今連續施放四年 (每年一次) 後停止不用，自第四次施放藥品後經  $n$  年 ( $n \in N$ ) 土壤中殘留藥品始少於散布第二次前之殘留量，則  $n$  值為\_\_\_\_\_ 但  $\log 3 = 0.4771, \log 3.439 = 0.5364$ 。

<寅> 設有一圓  $C_1$ ，其內接正方形為  $S_1$ ，而  $S_1$  之內切圓為  $C_2$ ， $C_2$  之內接正方形為  $S_2$ ，依此作出  $C_3, S_3; C_4, S_4; \dots, C_n, S_n$  試問  $n$  多大時  $C_n$  之半徑始

小於圓  $C_1$  之半徑的  $\frac{1}{100}$ ? 但  $\log 2 =$

0.3010。

<卯> 有一團體 3000 人欲乘遊覽車旅遊，大型遊覽車每輛可乘 47 人，費用 800 元，小型遊覽車每輛可乘 37 人，費用 500 元，設每輛車須乘滿，

- ① 求訂車法有幾種。
- ② 又若欲使費用最少，須如何訂遊覽車，並求其最少費用。

(註)：此題為北一女(70)學年度第二次模擬考試題。

<辰> 老羅在台北地形圖上看到“中央研究院”在地圖上為一半徑 5 公分之圓形，今老羅位置在台北火車站且地圖上火車站之位置在離“研究院”中心點南面 70 公分，再向東 50 公分處，今老羅以每小時 5 公里之速度坐計程車向研究院大門口前進即向北分速度 4 km/hr，向西分速度 3 km/hr，求老羅從火車站至研究院門口需多少小時(其中 1 公里在地圖上之比例為 1 公分)。

(B)高二部份

<甲> 甲、乙、丙三人從同一地點出發，甲以每小時 3 公里之速度向北方走，乙以每小時  $4\sqrt{2}$  公里之速度向東北方走，丙以每小時 2 公里之速度向東  $30^\circ$  北前進，設兩小時後三人分別在  $A, B, C$  三點，則  $\triangle ABC$  之面積為\_\_\_\_\_。

<乙> 甲船從港口 0 向東以每小時  $a$  公里之速度直線駛離，在此同時乙船正在港口東  $60^\circ$  北方向距離港口 5 公里處以每小時  $2a$  公里速度直線駛向港口，當甲船離港口  $x$  公里，乙船離港口  $y$  公里時兩船最近為  $l$  公里，求  $x, y, l$ 。

承上之條件今若  $a = 1$ ，且兩船距離保持在  $\sqrt{\frac{79}{28}}$  公里或  $\sqrt{\frac{79}{28}}$  公里內，其前後經過之時間為幾小時(求至小數點後第三位四捨五入)。

<丙> 設直線型高速公路上甲、乙兩地相距 100 公里今配合各路段之需要欲裝置路燈，其情況如下：

若甲、乙兩地在數軸上記為 1 單位且甲地為  $A_0(0)$  路燈記為  $a_0$ ，乙地為  $A_1(1)$  路燈號碼記為  $a_1$ ，今線段  $A_{n-2}A_{n-1}$  之內分點  $A_n(a_n)$  即  $A_n$  地點之路燈記  $a_n$ ，今使  $A_{n-2}A_n : A_nA_{n-1} = 3 : 2$  ( $n \geq 2, n \in N$ )，回答下列各問：

- ① 記  $a_n$  號碼之路燈距  $A_0$  地(甲地)幾公里(計算至小數點以下第三位)
- ② 求  $a_n = ?$
- ③ 求當  $n$  很大時  $A_n$  地距甲地幾公里(計算至小數點以下第三位)。

<丁> 很小很小的圓心角所對的圓弧長和弦長之比幾乎就是 1，試根據這個道理求下列兩問題。

①  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2\theta}{\theta^2}$  之值

② 求下列情況時飛機的高度，若「數學傳播公司」大樓上懸掛一氣球，此氣球半徑 3 公尺，且其球心離地面 100 公尺，今老羅在飛機上，看到此氣球之視角為  $2'$ ，又看到氣球中心之俯角為  $30^\circ$ ，求飛機距地面之高度？其中  $\pi = \frac{22}{7}$ 。

<戊> “中央研究院數學研究所”樓高 30 公尺對面一座小山其高 200 公尺，且兩地相距 40 公尺今老羅在研究所之陽台上測此山的山頂與山腳之張角與測此山山頂與山頂上懸掛一氣球的張角相等，求此氣球離地面之高度。

<己> 設湖面高 120 公尺之山丘上測得一塔頂之仰角為  $15^\circ$ ，同時測得映入湖中之塔頂的俯角為  $45^\circ$ ，求塔頂距湖面之高度。

<庚> “數學傳播”公司上空懸掛一氣球，若太陽在正南  $80^\circ$  東方仰角為  $30^\circ$  之方向時，在地上氣球所生之影子為  $A$ ，正南  $70^\circ$ ，西方仰角  $45^\circ$  方向在地面上氣球此時之影子為  $B$ ，若  $A, B$  之距為 700 公尺求氣球

之高度。

<辛> 平面上移動的兩點  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ , 其坐標各為時間  $t$  的函數, 可表示為

$$\begin{cases} x_1 = a \cos t & x_2 = b \sin 2t \\ y_1 = a \sin t & y_2 = b \cos 2t \end{cases}$$

其中  $a, b$  為正實數在  $0 \leq t \leq 2\pi$  的範圍, 求

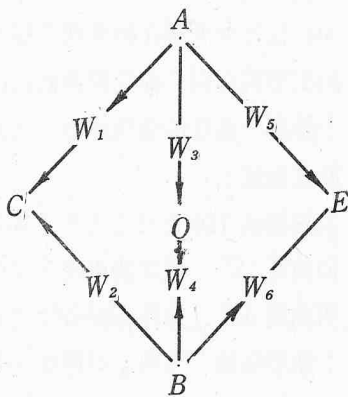
- ①  $P, Q$  相距最近的時刻及其距離。
- ②  $P, Q$  相距最遠的時刻及其距離。

<壬> 某建設公司有載重 4 噸的“小貨車” 7 輛, 載重 5 噸的“大貨車” 4 輛及 9 名司機現此公司每天最少要運送 30 噸的建築材料前往工地, 今設調度車輛之方法有  $M$  種, 但若“小貨車”開一趟費用要 500 元, “大貨車”開一趟要 800 元, 此時回答下列各問題:

- ① 共有多少種調度車輛之方法。
- ② 每天要“小貨車”“大貨車”各幾輛, 始能使費用最少。

<癸> 設有二石油倉庫  $A, B$  各有石油 8 仟加侖, 7 仟加侖, 今有三汽油站  $C, D, E$  各需汽油 4 仟加侖, 5 仟加侖, 6 仟加侖, 又各運送道路如圖所示, 設  $W_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) 表各運送道路, 且知運送道路  $W_i$  每仟加侖汽油之運費為  $t_i$  元

$$\text{且 } \frac{t_1}{2} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_3}{3} = \frac{t_4}{7} = \frac{t_5}{2} = \frac{t_6}{4} = 500 \text{ 元}$$



求下列各問:

- ①  $A, B$  二石油倉庫各運多少加侖至各

汽油站, 會使運費最經濟。

- ② 最經濟運費為多少。

<子>  $x, y$  平面上  $y \leq -2x^2 + 3x + 2$  及  $y \geq x^2 - 4$  之區域令  $3x + y = k$ , 求下列各問:

- ① 求  $k$  之最大值並求發生最大值之點坐標。
- ② 求  $k$  之最小值並求發生最小值之點坐標。

(註): 此題非線性規劃之試題

<丑>  $\triangle OA_1B_1$  中  $\angle O = 30^\circ, \angle B_1 = 90^\circ, \overline{A_1B_1} = \sqrt{7}$ , 點  $B_1$  在  $\overline{OA_1}$  之射影(或稱投影垂足)為  $A_2, A_2$  在  $\overline{OB_1}$  之射影為  $B_2$ , 按此方式  $A_n$  在  $\overline{OB_{n-1}}$  之射影為  $B_n$ , 而  $B_n$  在  $\overline{OA_{n-1}}$  之射影為  $A_{n+1}$ , 則無窮級數  $\overline{A_1B_1} \cdot \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} \cdot \overline{B_2A_3} + \overline{A_3B_3} \cdot \overline{B_3A_4} + \dots$  之和為何。

<寅> 老羅在地平面上自定一定點然後向東走了 1 公里然後向北走  $\frac{2}{3}$  公里再向西走了

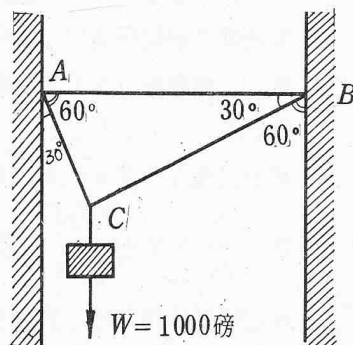
$(\frac{2}{3})^2$  公里, 再向南走  $(\frac{2}{3})^3$  公里,

……如此繼續走, 每轉一次彎, 則走原距離的  $\frac{2}{3}$ , 如此下去老羅最後將停在距原定

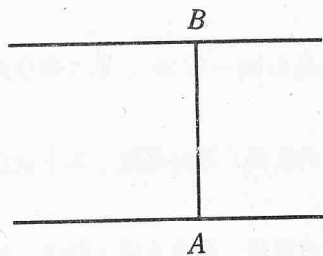
點約幾公里?

<卯> 一物體重 1000 磅, 用金屬線懸掛之, 如下圖所示, 設  $\overline{AB} = 20$  (呎),  $\overline{AC} = 10$  (呎),  $\overline{BC} = 10\sqrt{3}$  (呎),

- ① “線  $\overline{AC}$ ” 與 “線  $\overline{BC}$ ” 作用於點  $C$  之力各為何?
- ② 若所有三線之強度相同, 何者最有裂斷可能? 何者最小有裂斷可能?



- <辰> 河寬一公里流速每時 3 公里，今老羅划船橫渡此河，由  $A$  點出發，而划行 30 分鐘後使船頭對準對岸最近點  $B$  處，如圖所示求老羅划行之距離。



- <己> 橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  之外切矩形之

- ① 最大面積為 \_\_\_\_\_
- ② 最小面積為 \_\_\_\_\_

(註)：因有很多同學不知如何證明此公式，特將此題編出供參考。

- <午> 天文學測知地球公轉軌道為橢圓形，太陽位居焦點之一，近日點之距離為 91,500,000 哩，遠日點之距離為 94,500,000 哩，求軌道之離心率。  
(提示)：  $a - c =$  近日點之距離。  
 $a + c =$  遠日點之距離。

- <末> 在平面上，固定相異兩點  $Q, R$  取  $P$  點使得  $\triangle PQR$  之外心與重心距邊  $QR$  等高，則  $P$  點之軌跡名稱爲  $\Gamma$ ，求

- ①  $\Gamma$ ：
- ②  $\Gamma$  的離心率。

- <申> 橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， $(a > b > 0)$  內接三角形最大面積為 \_\_\_\_\_，並證明之。