資 料 類

莫斯科大學入學口試的故事的問題解答

施 拱 星　台大數學系

題目請參見本刊第四卷第四期第 81頁

1. $\forall x \neq 0$，

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\left(\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\right)+\left(\frac{x^8}{9!}-\frac{x^{10}}{11!}\right)+\cdots\cdots$$

若 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$，

$$\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}=\frac{x^4}{7!}(42-x^2)>0\ ,\ \frac{x^8}{9!}-\frac{x^{10}}{11!}>0\ ,\cdots\cdots$$

$\therefore$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)^3=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216}$$

同理

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$$

上下相減得

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3-\cos x>\frac{x^2}{24}-\frac{x^6}{216}=\frac{x^4}{216}(9-x^2)>0$$

2. 由 $(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}$，$x,y,z,t\in Q$，得

$$x^2+2y^2+z^2+2t^2=5 \quad ①$$
$$2xy+2zt=4 \quad ②$$
〔比較有理和無理部分〕

$① - \frac{5}{4}\times②$

$$\left(x-\frac{5}{4}y\right)^2+\left(z-\frac{5}{4}t\right)^2+\frac{7}{16}y^2+\frac{7}{16}t^2=0$$

故

$$y=t=0\ ,\ x=\frac{5}{4}y=0\ ,\ z=\frac{5}{4}t=0$$

但顯然 $(0,0,0,0)$ 不滿足原方程式，故原方程式無有理解 (x,y,z,t)。

3. 令 $f(a,b)=C_1$。由假設，存在 y_1，x_1 使 $f(a,y_1)\neq C_1$，$f(x_1,b)\neq C_1$。

Ⅰ 若 $f(a,y_1)\neq f(x_1,b)$，則已證。〔取 $(p,q,r,s)=(a,b,x_1,y_1)$〕

Ⅱ 假設 $f(a,y_1)=f(x_1,b)=C_2\neq C_1$，則分兩種情形。

(1) $\exists x^2$，$\exists$ $f(x_2,b)\neq C_1,C_2$，這時可取 $(p,q,r,s)=(a,b,x_2,y_1)$

(2) $\forall x$，$f(x, b) = C_1$ 或 C_2，

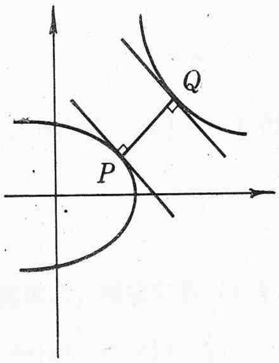
則由假設，$\exists\ \bar{x}$，$\bar{y} \neq b$，$f(\bar{x}, \bar{y}) = C_t \neq C_1, C_2$，則亦分兩種情形

(i) $f(\bar{x}, b) = C_2$ 取 $(p, q, r, s) = (\bar{x}, b, a, \bar{y})$

(ii) $f(\bar{x}, b) = C_1$ 取 $(p, q, r, s) = (\bar{x}, b, x_1, \bar{y})$，不論 $x \neq a$ 或 $x = a$。

讀者可以自行圖示之，更能一目瞭然。

4.



$x^2 + 4y^2 = 4$ 參數表示 $(2\cos\theta, \sin\theta)$，斜率 $-\dfrac{x}{4y} = -\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}$。

$xy = 4$ 參數表示 $\left(a, \dfrac{4}{a}\right)$，斜率 $-\dfrac{4}{a^2}$。

橢圓和雙曲線間的最短距離為 PQ 長。PQ 為兩曲線的公共法線。

(1)

$$\frac{\dfrac{4}{a} - \sin\theta}{a - 2\cos\theta} = \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a^2}{4}$$

從(1)得：

(2)

$$A(a, \theta) = (a - 2\cos\theta)^2 + \left(\frac{4}{a} - \sin\theta\right)^2 = \left(1 + \frac{a^4}{16}\right)(a - 2\cos\theta)^2$$

以及

(3)

$$\sin\theta = a^2 k = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 64}}$$

$$\cos\theta = 8k = \frac{8^2}{\sqrt{a^4 + 64}}$$

(3)′

$$k = \frac{1}{\sqrt{a^4 + 64}}$$

還有

$$2\sin\theta(a - 2\cos\theta) = \left(\frac{4}{a} - \sin\theta\right)\cos\theta$$

$$3\sin\theta\cos\theta - 2a\sin\theta + \frac{4}{a}\cos\theta = 0$$

代入(3)

$$24\,a^2k^2 - 2\,a^3k + \frac{32}{a}k = 0$$

或

$$k = \frac{a^3 - \dfrac{16}{a}}{12a^2} = \frac{a^4 - 16}{12a^3}$$

與(3)′比較，得

(4)

$$(a^4 - 16)^2(a^4 + 64) = 144a^6$$

從(3)得

$$a - 2\cos\theta = a - 16k = a - \frac{4(a^4 - 16)}{3a^3} = \frac{64 - a^4}{3a^3}.$$

故(2)變成

(5) $$A=\frac{a^4+16}{16}\left(\frac{a^4-64}{3a^3}\right)^2=\frac{(a^4+16)(a^4-64)^2}{144a^6}$$

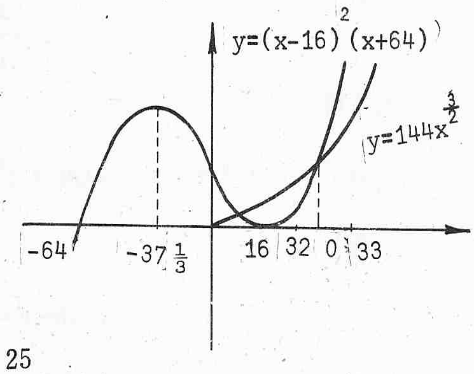
所以現在問題變成證明當$a>2$是(4)的唯一解時，(5)中的$A\geq 1.6$〔由觀察圖形可知在拋物線上，點$Q\left(a,\frac{4}{a}\right)$在點$(2,2)$之右，且唯一。〕

令$x=a^4$，問題變成：

對於$\varphi(x)=(x-16)^2(x+64)-144x^{\frac{3}{2}}$的唯一解$x_0$（$>16$），$A(x_0)\geq 1.6$，其中

$$A(x)=\frac{x+16}{x+64}\left(\frac{x-64}{x-16}\right)^2。$$

觀察$y=(x-16)^2(x+64)$以及$y=144x^{\frac{3}{2}}$的圖形可知$\varphi(x)$在交點附近為單調上升。解析的證明如下：



$$\varphi'(x)=(x-16)(x-16+2(x+64))-144\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$=(x-16)(3x+112)-216\sqrt{x}$$
$$=3x^2+64x-1782-216\sqrt{x}$$
$$=3(x^2-594)+64\sqrt{x}\left(\sqrt{4}-\frac{216}{64}\right)$$
$$>3(x^2-625)+64\sqrt{x}(\sqrt{x-4})>0\quad 若\ x>25$$

現 $\varphi(32)=16^2\cdot 96-144(4\sqrt{2})^3$
$$=128\cdot 48(4-\sqrt[3]{2})<0$$

$$\varphi(33)=17^2\cdot 97-144\sqrt{33}^3=28033-144\cdot 33\sqrt{33}>28033-144\cdot 33\cdot\sqrt{\frac{100}{3}}$$
$$>28033-15840\times 1.74>0$$

故 $x_0=32.\cdots\cdots$ 即 $32<x_0<33$

今 $A(x)=\left(1-\frac{48}{x+64}\right)\left(1-\frac{48}{x-16}\right)^2$ 在$x>16$為單調下降。

$\therefore$ $(A(32)=2>)A(x_0)>A(33)=\frac{49}{97}\cdot\frac{31^2}{17^2}=1.67\cdots>1.6$

註：(1)式亦可由$A(a,\theta)$的極小值條件，$A'_\theta=0$，$A'_a=0$求得。

給普通學生做的問題[3]。

由週期性及關於y軸的對稱性（$\sin\cos x$和$\cos\sin x$皆為偶函數），可將討論限於$[o,\pi]$。但是，若$\frac{\pi}{2}<x<\pi$，則

$$\cos(\sin x)=\cos(\sin(\pi-x))>0>-\sin(\cos(\pi-x)=\sin(\cos x)$$

設$0<x<\frac{\pi}{2}$，則

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\sin(\cos x)$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x-\sin x}{2}\right)>0$$

因

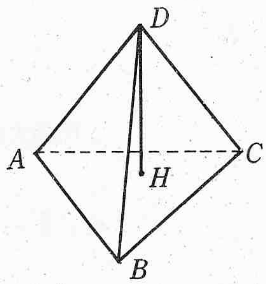
$$0<\frac{\sin x+\cos x}{2}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{4},\ \left|\frac{\cos x-\sin x}{2}\right|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{4}。$$

又當 $x=0$，$\frac{\pi}{2}$，π 時，可以直接代入驗算。

故總有　$\cos\sin x>\sin\cos x$　。

下面是給第五類做的 6 題。

1. 由假設 $DB\perp DC$，故以 BC 爲直徑的球 Σ 過 Q，S，D 三點。又因 DH 垂直 $\triangle ABC$ 的平面 π，故 D 在過 SC 且垂直平面 π 的平面和 Σ 的相交圓 Γ 上。所以 $\Gamma=\Sigma\cap\Sigma'$，其中 Σ' 是以 AC 爲直徑的球，故過 P，S。因 D 在球 Σ' 上，故 $\angle ADC$ 爲直角。同理可證 $\angle ADB$ 爲直角。故有



$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2,\ \overline{BD}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2,\ \overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{CA}^2$$

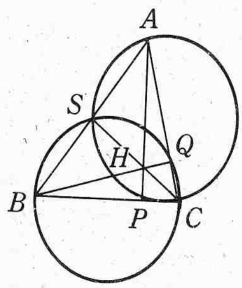
若令　$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$　$\overline{AB}=c$ 則

$$6(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)-(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})^2$$

$$=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq0$$

且等號成立的充要條件爲 $a=b=c$，即 $\triangle ABC$ 爲正三角形。



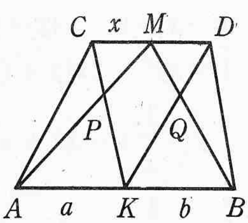
2. $$\sqrt[3]{60}-2-\sqrt[3]{7}=-(4-\sqrt[3]{60})+(2-\sqrt[3]{7})$$

$$=-\frac{4}{4^2+4\sqrt[3]{60}+\sqrt[3]{3600}}+\frac{1}{2^2+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}$$

$$=-\frac{1}{4+\sqrt[3]{60}+\dfrac{\sqrt[3]{3600}}{4}}+\frac{1}{4+\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{49}}>0$$

$$\frac{\sqrt[3]{3600}}{4}=\sqrt[3]{\frac{900}{16}}>\sqrt[3]{\frac{800}{16}}=\sqrt[3]{50}>\sqrt[3]{49}$$

3. 令 $AK=a$，$BK=b$，$CD=c$，$CM=x$，$0\leq x\leq c$　令梯形的高爲 h。



則四邊形 $PKQM=\triangle AMB-\triangle APK-\triangle KQB$

$$=f(x)=\frac{h}{2}\left(a+b-a\frac{a}{a+x}-b\frac{b}{b+c-x}\right)$$

$$=\frac{h}{2}\left(\frac{x}{a+x}+\frac{b(c-x)}{b+c-x}\right)$$

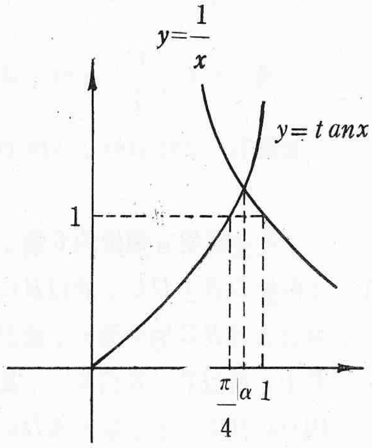
$$f'(x)=\frac{h}{2}\left(\frac{a^2}{(a+x)^2}-\frac{b^2}{(b+c+x)^2}\right)=0$$

∴ 當 $a(b+c-x)=b(a+x)$時，$f(x)$ 爲極大，或$(a+b)x=ac$，即 $\frac{CM}{MD}=\frac{AK}{KB}$，即當$M$爲$CD$與$AC$，$BD$延長線的交點$O$和$K$連線的交點時。

4. $y=x\cos x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$y'=\cos x-x\sin x=x\cos x(\frac{1}{x}-\tan x)=0$

在$x=\alpha$時，$\alpha=\cot\alpha$即$y=\frac{1}{x}$與$y=\tan x$ 的圖形的交點。



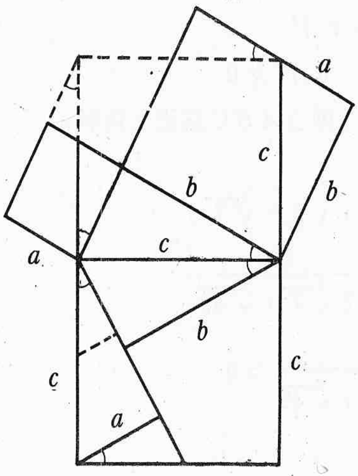
∴
$$\frac{\pi}{4}<\alpha(<1)\text{見圖。}$$

∴
$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}<\sin\alpha$$

y的極大值$=\alpha\cos\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha$

$<\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<0.71$

5. 有。



6. 解法一：

$$\begin{cases} x(y+x)^2=9 & (1)\\ x(y^3-x^3)=7 & (2)\end{cases}$$

(1)→$x>0$　(2)→$y>x$

(1)→$xy^2+2x^2y+(x^3-9)=0$

$$y=\frac{1}{x}(-x^2\pm\sqrt{x^4-x(x^3-9)})$$

$$=\frac{1}{x}(-x^2+\sqrt{9x})=-x+\frac{3}{\sqrt{x}}>0$$

由(2) $y^3=\frac{7}{x}+x^3$，$y=(\frac{7}{x}+x^3)^{\frac{1}{3}}$

令 $f(x)=-x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\left(\dfrac{7}{x}+x^3\right)^{1/3}$

欲證 $f'(x)<0\ \forall x>0$，即 $f(x)$ 爲單調下降。故 $f(x)$ 的零根爲唯一。

$$f'(x)=-1-\frac{3}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{7}{x}+x^3\right)^{2/3}}\left(-\frac{7}{x^2}+3x^2\right)$$

$$=-1-\frac{3}{2\sqrt{x^3}}-\frac{x^4-\frac{7}{3}}{x^2\left(\frac{7}{x}+x^3\right)^{2/3}}$$

$$=-\left(1+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{\frac{7}{3}-x^4}{x^{4/3}\left(7+x^4\right)^{2/3}}\right)$$

亦即證明

$$\forall x>0\ ,\ \frac{\frac{7}{3}-x^4}{x^{4/3}\left(7+x^4\right)^{2/3}}<\frac{3}{2\sqrt{x^3}}+1$$

(1) 設 $x\geq 1$ 則

$$左<\frac{\frac{7}{3}}{(7+1)^{2/3}}=\frac{7}{12}<1<右$$

(2) 若 $0<x\leq 1$

$$左<\frac{\frac{7}{3}}{x^{4/3}\cdot 7^{2/3}}<\frac{1}{x^{4/3}}\frac{\frac{7}{3}}{3}<\frac{1}{x^{4/3}}<\frac{1}{x^{3/2}}<右$$

由觀察法，$x=1$，$y=2$ 爲一解，故爲唯一實數解。

註：亦可由作圖，作出 $y^3=\dfrac{7}{x}+x^3$ 及 $y=-x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ 的略圖，算出來。

解法二：

$$y(x+y)^2=9 \quad (1)$$
$$y(x^3-y^3)=7 \quad (2)$$

$(1)\to x_1=-y+\dfrac{3}{\sqrt{y}}$

$(2)\to x_2^3=y^3+\dfrac{7}{y}$

我們來證明 $y\gtreqless 1\Rightarrow x_1\gtreqless x_2$

$$x_1^3-x_2^3=-2y^3+9\sqrt{y}^{\,3}-27+\frac{27}{\sqrt{y}^{\,3}}-\frac{7}{y}=\frac{1}{\sqrt{y}^{\,3}}\{27(1-\sqrt{y}^{\,3})+2y^3(1-\sqrt{y}^{\,3})-$$

$7\sqrt{y}(1-\sqrt{y^5})\}$

$\therefore \quad y=1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \quad x_1 = x_2 = 2$

故（2，1）爲解。現證 $y \neq 1 \rightarrow x_1 \neq x_2$。

$$x_1^3 - x_2^3 = \frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{y^3}} Y$$

$$Y = (27+2y^3)(1+\sqrt{y}+\sqrt{y^2}) - 7\sqrt{y}(1+\sqrt{y}+\sqrt{y^2}+\sqrt{y^3}+\sqrt{y^4})$$

$$> (1+\sqrt{y}+\sqrt{y^2})\{27+2y^3-7\sqrt{y}(1+\sqrt{y^3})\} \text{ 若 } y>0$$

因若設 $y \geq 4$，

$$27+2y^3-7\sqrt{y}-7y^2 = 27+\sqrt{y}\left(\frac{1}{4}y^2\sqrt{y}-7\right)+7y^2\left(\frac{1}{4}y-1\right) > 27$$

若（$0<$）$y \leq 4$，$7\sqrt{y} \leq 14$

$$27+2y^3-7\sqrt{7}-7y^2 \geq 13+2y^3-7y^2 > 0$$

因 $y>0$ 時，$7y^2-2y^3<13$。（用微分算極大值）

令 $f(x)=7x^2-2x^3 \quad f'(x)=6x\left(\frac{7}{3}-x\right)$

$f\left(\frac{7}{3}\right)=12.7<13$。

說明：施先生的作法強調簡單、直接。諸位從這些解法中當可發現，給黑五類做的問題雖然難，但是都有很好的解法。以國內的水準來說，對數學極有興趣的學生從小加以訓練當可以達到這個程度。換句話說，這雖然是個窄門，但却不是針孔。蘇俄的這種作法，雖然可以達到抑低猶太學生人數的目的，可是長遠來說，能力強的數學力學系的畢業生仍然是猶太人子弟。而普通學生則因考試題目較簡單，也就比較沒有這麼努力去準備因此可能差距愈來愈大。蘇俄的這種作法的最終影響究竟如何就很難說了。（朱建正）