積分技巧的研究

何志誠　　中原大學學生

一、前　言

在一般「不定積分」中，最常見的方法就是部份積分法（ by parts ）但對於常見的題型中，其方法却十分繁雜。

$Ex\,1 : \int x^5 e^x dx = ?$ $Ex\,2 : \int e^{ax} \cdot \sin bx\, bx = ?$ $Ex\,3 : \int x^4 \cdot \sin x dx = ?$

如$Ex\,1$中就必須“ by parts ” 5次實在“工程浩大”本文將介紹一種較直接的方法。

二、構　思

令$D = \dfrac{d}{dx}$ ，$Dy = y' = \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{1}{D}(Dy) = \dfrac{1}{D} \cdot \left[\dfrac{dy}{dx}\right] = y \therefore \dfrac{1}{D} \cdot y' = y$ ，

即 $\dfrac{1}{D} y = \int y\, dx$，其中$C$常數予省略。就此“觀點”試解$Ex\,1$ ： $\int x^5 \cdot e^x dx$

$$Ex\,1 : \int x^5 e^x dx = \frac{1}{D} \cdot [x^5 e^x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D+1}[x^5] \cdots\cdots (\text{見②})$$

$$= e^x \cdot [1 - D + D^2 - D^3 + D^4 - D^5 + \cdots] x^5 = e^x [x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120] + C$$

其中 $Dx^5 = \dfrac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$ ，$D^2 x^5 = \dfrac{d^2}{dx^2}(x^5) = (x^5)'' = 20x^3$ ，$\cdots\cdots D^5 x^5 = 5!$

，$D^6 x^5 = 0$ ，爲了我們運算方便起見就此整理下列幾個公式，因其證明過程甚繁就此省略。

三、公式整理

（下述$L(D)$與$f(D)$皆爲D的多項式，*者爲常用）

1.* $\dfrac{1}{L(D)} e^{ax} = \dfrac{1}{L(a)} e^{ax}$ ，$L(a) \neq 0$

$f(D) e^{dx} = f(a) e^{ax}$

2.* $\dfrac{1}{L(D)} e^{ax} \cdot V(x) = e^{ax} \dfrac{1}{L(D+a)} V(x)$

$f(D) e^{ax} V(x) = e^{ax} \cdot f(D+a) V(x)$

3.* $\dfrac{1}{L(D^2)} \cos(ax+b) = \dfrac{1}{L(-a^2)} \cos(ax+b)$

，$L(-a^2) \neq 0$

$f(D^2) \cos(ax+b) = f(-a^2) \cos(ax+b)$

$\dfrac{1}{L(D^2)} \sin(ax+b) = \dfrac{1}{L(-a^2) \sin(ax+b)}$

，$L(-a^2) \neq 0$

$f(D^2) \cos(ax+b) = f(-a^2) \sin(ax+b)$

4.* $\dfrac{1}{(D-a)^m f(D)} e^{ax} = \dfrac{x^m e^{ax}}{m! f(a)}$，其中

$f(a) \neq 0$

5.* $\dfrac{1}{D^2+a^2} \sin(ax+b) = \dfrac{-x \cdot \cos(ax+b)}{2a}$

$\dfrac{1}{D^2+a^2} \cos(ax+b) = \dfrac{x \cdot \sin(ax+b)}{2a}$

6.* $\dfrac{1}{L(D)} x^m = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_m D^m) x^m$

，$a_0 \neq 0$

7.* $\dfrac{1}{(D-a)^m} Q(x)$

$= \dfrac{e^{ax}}{(m-1)!} \displaystyle\int_c^x e^{-au} (x-u)^{m-1} Q(u)\, du$

C爲任意數

$\dfrac{1}{(D-a)^2+b^2} Q(x)$

$= \dfrac{e^{ax}}{b} \displaystyle\int_c^x e^{-au} \sin t\ b(x-u)\ Q(u)\, du$

8.* $\frac{1}{L(D)} x\, V(x)$

$$= x\frac{1}{L(D)}V(x) - \frac{L'(D)}{[L(D)]^2}V(x)$$

四、實　例

Example 1：$\int x^4 e^{-x} dx = ?$

Ans：$\int x^4 e^{-x}\, dx$

$= \frac{1}{D}[x^4 e^{-x}]$ …代②

$= e^{-x}\frac{x^4}{D-1}$

$= -e^{-x}(1+D+D^2+D^3+D^4+D^5+\cdots\cdots)x^4$

……………………(＊)

$= -e^{-x}(x^4+4x^3+(2x^2+24x+24)$

(＊)式中 $\frac{1}{D-1} = -\frac{1}{1-D} = -(1+D+D^2+\cdots +D^{n-1}+\cdots\cdots)$ 可視爲 D 的多項式，以升冪排列之長除法求得或求其泰勒展開式亦可。

$$\begin{array}{r|l} & 1+D+D^2+\cdots \\ \hline 1-D & 1 \\ & 1-D \\ \hline & D \\ & D-D^2 \\ \hline & D^2 \\ & D^2-D^3 \\ \hline & D^3 \end{array}$$

Example 2：$\int\int x^3 e^x\, dxdx = ?$

Ans：

原式 $= \frac{1}{D^2}\cdot[x^3 e^x]$

$= e^x\cdot\left[\frac{x^3}{(D+1)^2}\right]$

$= e^x\cdot[1-2D+3D^2-4D^3+\cdots]x^3$

$= e^x\cdot[x^3-6x^2+18x-24]+ax+b$

Example 3：$\int x^3\cdot \sin x dx = ?$

Ans：

原式 $= Im\left\{\frac{1}{D}[e^{ix}\cdot x^3] = Im\cdot e^{ix}\frac{x^3}{D+i}\right\}$

$= Im\left\{e^{ix}\frac{(D-i)x^3}{(D+i)(D-i)}\right\} = Im\left\{e^{ix}\frac{3x^2-ix^3}{1+D^2}\right\}$ ←……$Dx^3=3x^2$

$= Im\{e^{ix}\cdot(1-D^2+D^4\cdots\cdots)(3x^2-ix^3)\}$ ←∵ $D^4\cdot x^3=0$ 取至 D^4 代 Example 1 之②式

$= Im\{e^{ix}\cdot[3x^2-ix^3-6+6ix]\}$

$= Im\{(\cos x+i\cdot\sin x)\cdot[(3x^2-6)+i(6x-x^3)]\}$

$= Im\{[\cos x\cdot(3x^2-6)+\sin x\cdot(x^3-6x)+i[\sin x(3x^2-6)+\cos x(6x-x^3)]\}$

$= \sin x\cdot(3x^2-6)+\cos x(6x-x^3)+C$

∵ Example 3 中無 e^{ax} 之型式 ∴只好借用 e^{iax} 之型式

Example 4：$\int e^{ax}\cdot\cos bx\, dx = ?$

Ans：原式 $= \frac{1}{D}[e^{ax}\cdot\cos bx]$

$= e^{ax}\cdot\frac{1}{D+a}\cdot\cos bx$ …………(2)

$= e^{ax}\frac{(D-a)\cos bx}{(D+a)(D-a)}$ …(見＊＊)

$= e^{ax}\frac{-b\cdot\sin bx-a\cos bx}{D^2-a^2}$

$= e^{ax}\frac{-b\sin bx-a\cos bx}{-b^2-a^2}$ …見(3)

$= e^{ax}\frac{1}{a^2+b^2}\cdot(a\cdot\cos bx+b\cdot\sin bx)+C$

(＊＊)：此式不仿 Example 1、2、3 中 $\frac{1}{D+a}$ 展開是因 $D^n\ x^{n-1}=0$ 而在 Example 4 中∵無一 n 值使 $D^n\cdot\sin bx$ (或 $\cos bx$) $=0$，∴只好利用④中 $f(D^2)$ →

$f(-a^2$ 之型式而 $(D+a)\cdot(D-a)=D^2-a^2$ $\leftarrow D^2$ 之型式

Example 5：$\int x^2\cdot 3^x\ dx=?$

Ans：在①中知 $\dfrac{1}{L(D)}e^{ax}=\dfrac{1}{L(a)}e^{ax}$ 但

$$\frac{1}{L(D)}\cdot b^{ax}=?$$

$\because b^{ax}=exp\cdot[ax\cdot lnb]\Rightarrow$

$$L(D)\cdot b^{ax}=L(a\cdot lnb)\cdot b^{ax}\cdots(**)$$

$$\therefore \int x^2\ 3^x\ dx=\frac{1}{D}\cdot[x^2\cdot 3^x]$$

$$=3^x\cdot\frac{1}{D+ln\,3}x^2\cdots\cdots$$ 代②之轉換式………(＊)

$$=3^x\cdot\left(\frac{1}{ln^3}-\frac{D}{(ln^3)^2}+\frac{D^2}{(ln\,3)^3}\cdots\right)\cdot x^2\cdots(*)$$

$$=3^x\cdot\left(\frac{x^2}{ln\,3}-\frac{2x}{(ln\,3)^2}+\frac{2}{(ln\,3)^3}\right)\ \#$$

$$(*)\ \frac{1}{L(D)}\cdot b^{ax}\cdot V(x)=b^{ax}\frac{1}{L(D+a\ lnb)}V(x)$$

$$(*)\ \frac{1}{D+a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+D/a}$$

$$=\frac{1}{a}\left[1-\frac{D}{a}+\frac{D^2}{a^2}-\frac{D^3}{a^3}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{D^2}{a^2}+\frac{D^2}{a^3}-\frac{D^3}{a^4}+\cdots\cdots$$

在以上各式中，主要是利用了各函數之“不變性”，如 $D\cdot e^{ax}=a\cdot e^{ax}$　$D^2\cdot cos\ x=-a^2\cdot cos\ x$ ……等各式在“微分運算子”（*differential operator*）演算後，其“型態”不變，但如 lnx $\because (lnx)'=\dfrac{1}{x}$ 與原式不同皆超出本方法之範圍，但是在經過某些手段之後亦可代本方法，就此舉例說明：

Example 6：$\int(ln\,x)^4\ x^2\ dx=?$

Ans：令 $ln\,x=z$　$\therefore x=e^z,\ dx=e^z\ dz$　代入

$$\therefore \text{原式}=\int z^4\cdot e^{2Z}\cdot e^Z\ dz=\frac{1}{D}z^4\cdot e^{3Z}$$

$$\left(D=\frac{d}{dz}\right)$$

$$=e^{3Z}\cdot\frac{1}{D+3}Z^4$$

$$=e^{3Z}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{D}{9}+\frac{D^2}{27}-\frac{D^3}{81}+\frac{D^4}{243}\cdots\cdots\right)Z^4$$

$$=e^{3Z}\cdot\left(\frac{Z^4}{3}-\frac{4}{9}Z^3+\frac{4}{9}Z^2-\frac{8}{27}Z+\frac{8}{81}\right)+C$$

$$=x^3\cdot\left[\frac{1}{3}(ln\,x)^4-\frac{4}{9}(ln\,x)^3-\frac{4}{9}(ln\,x)^2-\frac{8}{27}(ln\,x)+8/81\right]+C\ \#$$

注意事項：一般而言，線性之微分運算子不恒具有“交換性”但係數爲常數者，則具有交換性。

例：$Dx\neq xD$　$\because Dxy=y+xy'$ 而 $xDy=xy'$

$(D-a)(D-b)y$

$=(D-b)(D-a)y$

$\therefore (D-d)(D-a)=(D-a)(D-b)$

於*Example* 3 中 $\int x^3\ sin\ x\ dx=?$ 中，取 $Im\ e^{ix}$ 代入，工程仍然浩大，下文將繼續介紹另一種較簡易之道（見*Example* 7）。

想法：$\int udv=uv-\int vdu\leftarrow by\ parts$

$=uv-\int vu'dx\ \ (\because du=u'dx)$

$=uv-\int u'(vdx)$

$=uv-\int u'd\left(\dfrac{v}{D}\right)\leftarrow\dfrac{v}{D}=\int vdx$

$=uv-u'\dfrac{v}{D}+\int\dfrac{v}{D}u''dx\leftarrow$ 再 *by parts* 一次

$=uv-u'\dfrac{v}{D}+u''\dfrac{v}{D^2}-\int\dfrac{v}{D^2}u'''dx\leftarrow$ 再

by parts 一次

$$=uv-u'\frac{v}{D}+u''\frac{v}{D^2}-u'''\frac{v}{D^3}+u^{(4)}\frac{V}{D^4}$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^n\int u^{(n)}\frac{v}{D^{n-1}}dx \ \#$$

$$n\in N$$

上式記憶方法如下：

先將原式化為 $\int udv=uv-\int vdu$ 型式。

然後以 +，－，+，－，+，－，…… 之順序排列之。

u 與 v 中，u 每"微分"一次，v 就"積分"一次如此類推。

Example 6：$\int x^5\ e^x\ dx=$？（與 *Example* 1 同型）

Ans：

原式 $=\int x^5\ de^x$

$$=x^5e^x-(x^5)'\frac{e^x}{D}+(x^5)''\frac{1}{D^2}e^x$$

$$-(x^5)'''\frac{e^x}{D^3}+(x^5)^{(4)}\frac{e^x}{D^4}$$

$$-(x^5)^{(5)}\frac{e^x}{D^5}+(x^5)^{(6)}\frac{e^x}{D^6}+\cdots\cdots$$

$$=e^x(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)$$

Example 7：$\int x^4\ \cos\ x\ dx=$？

Ans：原式 $=\int x^4\ d\ \sin\ x$

$$=x^4\ \sin\ x-(x^4)'\frac{\sin\ x}{D}+$$

$$(x^4)''\frac{\sin\ x}{D^2}-(x^4)'''\frac{\sin\ x}{D^3}+$$

$$(x^4)^{(4)}\frac{\sin\ x}{D^4}-(x^5)^{(5)}\frac{\sin x}{D^2}$$

$$+(x^5)^{(6)}\frac{\sin\ x}{D^6}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=x^4\ \sin\ x+4x^3\ \cos\ x-12x^2\cdot\sin\ x-24x\cdot\cos\ x+24\cdot\sin\ x$$

在以上兩個例子中似乎可看出這個方法必須使用在微分項(n)為多項式的情形，其實未必完全如此，下面就舉一個"非多項式"的情形。

Example 8：$\int e^x\ \cos\ x\ dx$

$$=\int e^x\ dsinx$$

$$=e^x\ \sin\ x-e^x(-\cos\ x)+\int e^x(-\cos\ x)dx$$

$$\therefore 2\int e^x\ \cos\ x\ dx=e^x〔\sin\ x+\cos\ x〕$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{e^x}{2}〔\sin\ x+\cos\ x〕$$

此例說明該方法未必限定多項式類型只是用起來不如用"Differential operator"的方法方便而已，當然此方法只是針對 Differential operator 非用 e^{ax} 不可的缺點而推導出的結果而已。

五、結　　語

微分運算子（Differential operator 逆運算法，原是十八世紀英國工程師 Heaviside 氏所提出。一般皆用來解線性常微分方程中的特解（或穩態解）（particular solution or steady state solution）目前國內中文及原文的應用數學（工程數學）及高等微積分（分析數學）甚少提及，而且內容甚簡。筆者特將此資料推廣於求"不定積分"上，願借"數季"之一小塊，獻給對微積分有興趣的朋友及新鮮人（freshman）。