從另一角度看$\sqrt{2}$

王湘君 師大附中

數學教師在課堂上老早對$\sqrt{2}$的「無理」性，做了很多的證明。雖然這裡想提出的證明與過去假設$\sqrt{2}$是有理數的矛盾證法相類似，但這個證明只需要一點點數系的基本性質，那就是一個有理數，可以表成有限小數或是循環小數，而這個性質也是學生所熟知的。證明如下：

【證明】

假設$\sqrt{2}$是一有理數，我們必須考慮兩種情形：

(1) 假設$\sqrt{2}$可以表成有限小數，讓它是三位小數。

$\sqrt{2}=1.abc$ $(a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，但$c\neq 0$)

把它寫成另數的形式

$$\sqrt{2}=1+\frac{abc}{1000}$$

$\Rightarrow 1000\sqrt{2}=1000+abc$

兩邊平方，

$2000000=(1000+abc)^2$

上式左邊末位必是0，而右邊末位必不為0，產生矛盾現象。

假設我們讓$\sqrt{2}$是四位有限小數

$$\sqrt{2}=1.abcd$$

或$\sqrt{2}=1.a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 等等，會產生同樣的矛盾結果

所以$\sqrt{2}$不是有限小數形式的有理數。

(2) 假設$\sqrt{2}$可以表成循環小數，讓它的循環節含三位小數，則

$\sqrt{2}=1.\overline{abc}$ $(a,b,c\in\{0,1,2\cdots,9\}$, $c\neq 0$)

把它寫成分數形式如下

$$\sqrt{2}=1+\frac{abc}{10^3}+\frac{abc}{10^6}+\frac{abc}{10^9}+\cdots$$

$$=1+\frac{abc}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\cdots\right)$$

$$=1+\frac{abc}{10^3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^3}}\right)$$

$$=1+\frac{abc}{10^3-1}$$

$\Rightarrow\sqrt{2}(10^3-1)=(10^3-1)+abc$

上式兩邊平方 得

$2(10^3-1)^2=((10^3-1)+abc)^2$

上式左邊末位數字恆爲2，右邊末位數字可能爲0，1，4，5，6或9，造成矛盾現象。如果我們讓$\sqrt{2}$是四位循環小數，或幾位循環小數，將會產生相同的矛盾結果。所以$\sqrt{2}$不是一個循環小數形式的有理數。

由(1)(2)知$\sqrt{2}$是一無理數。

以上的證明，所需要具備的數學知識很少，相信如果教師在課堂上用這種方法證明，學生一定不再懷疑$\sqrt{2}$的「無理」性。（本文譯：*Mathematical Teacher* ）