

費氏數列在電子計算機上之應用

石厚高譯 台北建國中學

假設有 50000 個數記錄在一卷磁帶上（一卷磁帶所能記錄的數字，遠超過 50,000 個），以磁帶 A 稱之。為便於討論，假設它們都不相等。同時也沒有按照某種特殊順序排列。例如磁帶最前面的幾個數可能是 368947，26716，9476387，6813，476，94768 等種。我們的問題是要把這些數按漸增順序排序同時把它們存在原來的磁帶 A 上。

解決這個問題的方法之一是利用電子計算機的記憶體以及另外兩卷磁帶。這兩卷磁帶各以磁帶 B 及磁帶 C 名之，用以幫助將磁帶 A 中數字排序。很快的我們就會知道如何利用這些磁帶。

辦法是把磁帶 A 中一些數放入記憶體中。在記憶體中把這些數排好順序，然後把排好順序的數抄到磁帶 B 及磁帶 C 上，如此繼續直至磁帶 A 上所有數都處理完畢為止。這些磁帶 B 及磁帶 C 上都是一段一段脫節的而排好順序的數列。這些脫節而完成排序的數列稱之為數串（strings）。

甚麼是一個脫節而完成排序的數列（串）呢？它是一列循漸增或漸減順序排好的數。例如磁帶 B 最前面的數也許會是圖一中的三串。注意在第 1，2 及 3 串中的數都是循漸增順序排列的。每串內的數都完成了排序，而與它串之間是彼此不相干的。在此例中共有三個脫節排序數串。



圖一

在此例中三個數串數字的個數都不相同。一數串可能會只有一個數或幾百個或幾千個甚至於更多。

圖一中沒有把第四數串列出，可是我們對它也略知一二那就是第四數串的第一個數必需小於第三數串的最後一個數（4768）。我們是如何知道的呢？很簡單，如果下一個數大於 4768 時，就成為第三數串中的一個數了。

處理磁帶 A 時，並不準備使記錄在磁帶 B 與磁帶 C 上的串數相等。事實上為了提高效率，兩卷磁帶上的串數是故意使它們不一樣。你很快就會發現為甚麼要這樣作。

一旦這些數串都已經存在磁帶 B 與磁帶 C 上，下一步就是把這兩卷磁帶上的各數串合併起來再存回磁帶 A 上。合併的意思是指把磁帶 B 與磁帶 C 上每串數按順序排成一串數。說得更明白一些，就是磁帶 B 上第一串數與磁帶 C 上第一串數相合併，把合併排好的一串數存在磁帶 A 上，然後把磁帶 B 上第二串數與磁帶 C 上第二串數相合併，合併好的這串數成為磁帶 A 的第二串數。

如此繼續這種處理直至磁帶 B 或磁帶 C 上的數串完畢為止。其中一卷磁帶將會比另一卷先處理完畢，因為兩卷磁帶上的串數是有意的安排成不一樣。

假設是磁帶 B 比磁帶 C 先處理完畢。現在在磁帶 A 及磁帶 C 上還留有一串串的數列。下一步的工作是把磁帶 A 與磁帶 C 合併以後的數串放在磁帶 B 上。如此繼續直至兩卷磁帶中的一卷處理完畢為止，磁帶 C 上的數串將先較磁帶 A 處理完畢。

這個故事的其餘部份，你也許能猜出來了。磁帶 A，磁帶 B 與磁帶 C 繼續變着數串的魔術，並且把它們合併起來。當數串作合併的時候，它們變得愈來愈長。結果是單獨一條磁帶，磁帶 A，上面只有一個 150,000 個數的數串。

這種排序的方法聽起來是很複雜而令人困惑，用不着擔心。它是很複雜的，可是我們拿一個例題逐步研究以後，你就會非常清楚了。

在討論例題以前，為了解它的作法，有些概念必需解釋清楚。

這裡是一個數列，就是所謂的費氏 (Fibonacci) 數列。

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

它沒有最末一項，無限的延續下去，你看到了嗎？級數中每一個數都是前面兩個數的和。所以 2 是 1 與 1 的和；21 是 8 與 13 的和；89 是 34 與 55 的和；等等。級數中下一個數為 144，它是 55 與 89 之和。

假設有一卷磁帶，以磁帶 A 名之，上面有 100 個隨意排列的數，為了便於討論，所有的數都是在 1 與 200 之間，包含 1 與 200，它們均不相等，這 100 個數是：

187, 83, 177, 161, 158, 82, 186, 123, 111, 72

18, 148, 112, 62, 140, 6, 71, 91, 193, 147

95, 116, 180, 129, 179, 198, 1, 3, 192, 36

167, 50, 47, 122, 178, 17, 166, 137, 81, 118

66, 131, 170, 27, 154, 150, 5, 86, 9, 87

55, 183, 38, 73, 78, 54, 143, 165, 200, 34

155, 65, 199, 185, 144, 136, 195, 125, 23, 32

21, 190, 142, 121, 172, 159, 64, 174, 194, 149

164, 11, 52, 134, 7, 25, 102, 135, 184, 90,

151, 24, 56, 132, 80, 39, 188, 30, 33, 67

我們是用費氏磁帶排序法把這些數按漸增順序排序。

這一個例題中只用了 100 個數。在排序的過程中能夠很容易的處理。在真正問題中。磁帶上的數字可能會有幾百，幾千甚至幾百萬。實際處理時，只有 100 個數是不會用費氏磁帶排序法的，只需把 100 個數放在記憶體中用斯氏法或其他有效辦法就行了。費氏磁帶排序法是當數字不能同時放在記憶體中方予使用。

把這 100 個數排序的第一步驟是產生有序數串。是由一種數串產生計劃，叫做比賽法所完成的。下面就是比賽法的處理程序

首先把磁帶中的 16 個數字存在記憶體的 16 個格子中。本例中的 16 個數如圖二

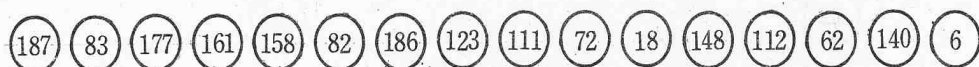


圖 二

下一步是把這些數兩個兩個作比較，找出所有數對中的勝利者 (winner)。所以 187 與 83 比較；177 與 161 比較；等等作完了八次比較以後，勝利者存在記憶體的八個格子中如圖三。勝利者是數對中兩個數內較小者。

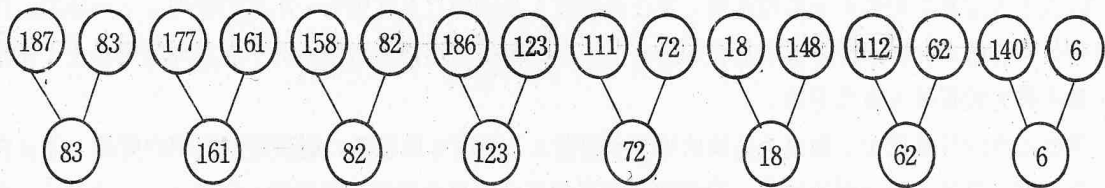


圖 三

下一步是比較由勝利者所組成的數，兩兩比較的結果是 4 個勝利者所成數列，圖四。

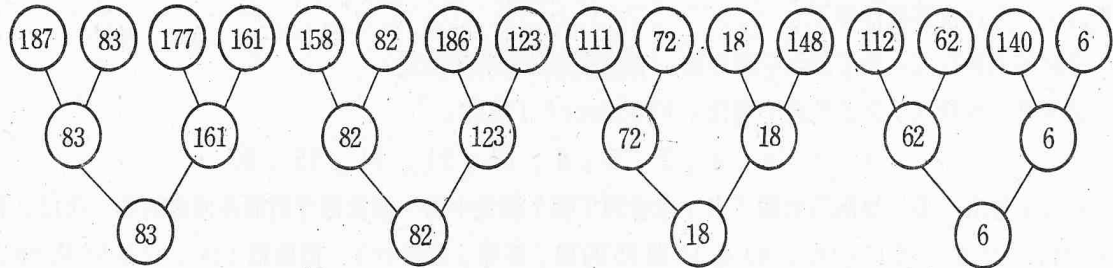


圖 四

然後比較 83 與 82，18 與 6 得二勝利者為 82 與 6，再比較此二數得此次比較的最後勝利者為 6。

16 個數中比較出 6 為最小之完整程序如圖五。6 就成為一數串的第一個數。把它寫在磁帶 B 上。現在我們再找一個數跟在 6 的後面。如果該數比 6 大，則列入第一數串；如果比 6 小，則為第二數串的第一個數。

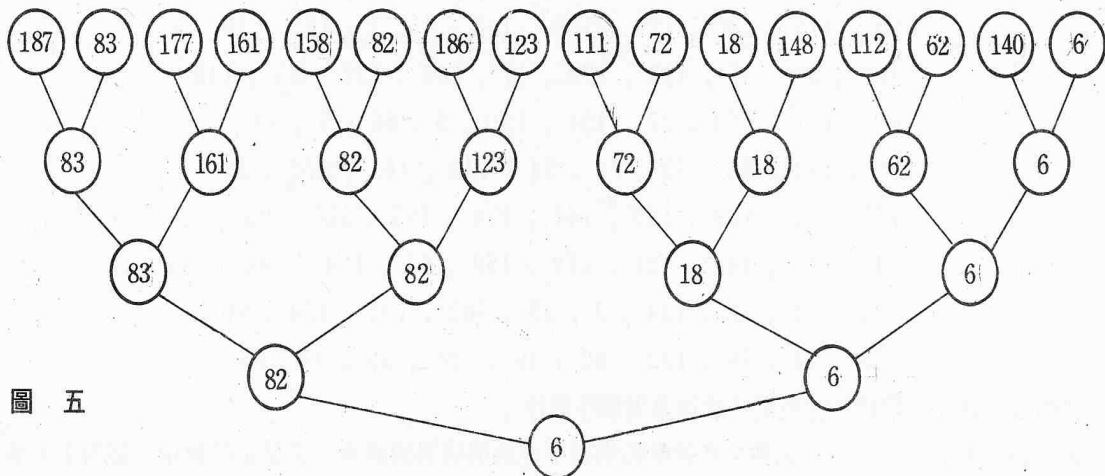


圖 五

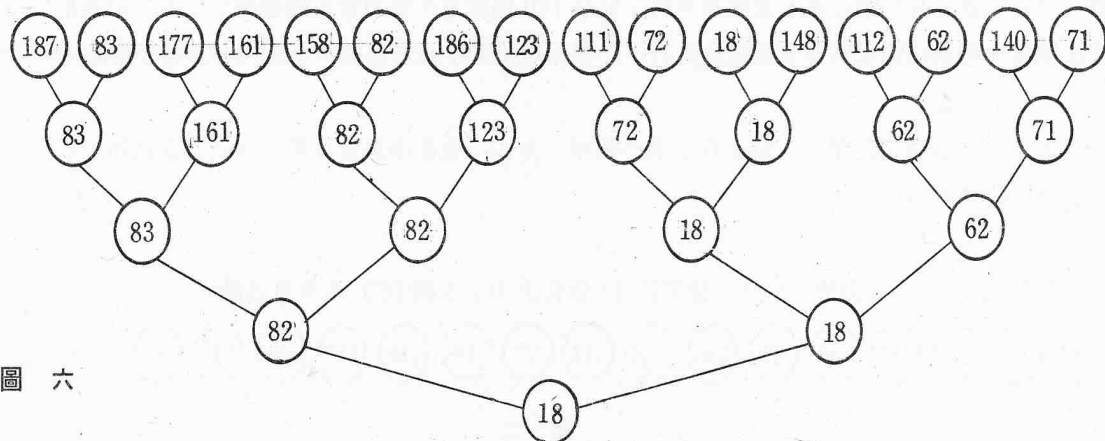


圖 六

在這 16 個數中找出最小的數以後，立即將該數以磁帶中的另一個數代替，再繼續作比賽，但僅作有需要的比較。例如沒有再把 187 與 83 比較的的必要，177 與 161 也是一樣。當 71 取代了 6 的位置以後，需要作的比較是 140 與 71 (71 為勝利者)；62 與 71 (62 為勝利者)；18 與 62 (18 為勝利者)；

以及 82 與 18 (18 為最後勝利者)。71 取代 6 以後比賽結果如圖六。18 步 6 之後也存在磁帶 B 上。因 18 大於 6，所以它與 6 在同一數串。

讓我們把比賽法再作一次。磁帶中取代 18 的是 91。與上次一樣，只作比賽中需要的比較，這些比較，這些比較是 91 與 148 (91 為勝利者)；72 與 91 (72 為勝利者)；72 與 62 (62 為勝利者)；82 與 62 (62 為最後勝利者)。

91 取代 18 以後所產生新勝利者之過程如圖七。62 大於 18，所以成為第一數串中一員。把它抄在磁帶 B 上，只要是存在磁帶 B 上的數小於上一次所存的數，它就成為新數串的第一個數。

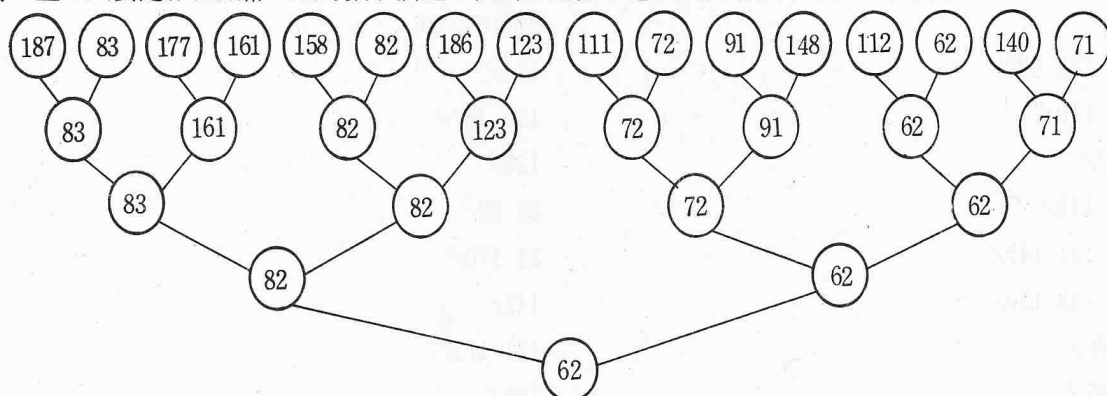


圖 七

繼續以上的處理過程，直到所有的原始資料都變成數串為止。數串建立以後都存在磁帶 B 上。所有的數串都產生以後，磁帶 B 的內容如下：

```

6 18 62 71 72 82 83 91 95 111 112 / 1 3
116 / 36 123 / 50 / 47 122 129 / 17 140 / 137 /
81 118 / 66 131 147 / 27 148 150 / 5 86 /
9 87 / 55 154 / 38 73 78 / 54 143 158 161 /
34 155 / 65 165 166 / 144 / 136 167 / 125 / 23 32 /
21 170 / 142 / 121 172 / 159 / 64 174 177 /
149 164 / 11 52 134 / 7 25 102 135 178 /
90 151 / 24 56 132 / 80 / 39 179 / 30 33 67
180 183 184 185 186 187 188 190 192 193 194
195 198 199 200 /

```

我們在磁帶 B 上用斜線表示一個數串結束及另一數串的開始處。

檢視各數串，你將發現數串可以小至只含有一個數。當然它也可以含有任意個數。數串中數字的個數一部份是受到磁帶 A 上原始資料紛亂情況的影響。此外數串的大小也視比賽法表中所用數字多少而定。我們只用了 16 個數，可是 2 的任意乘幂都可以：32，64，128，256，512，1024 等。電子計算機內可利用的記憶位置愈多，所產生數串愈長而排序效果亦愈好。

數一數數串的個數為 34。34 是費氏數列。

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

中的一項。這是很偶然的一個巧合，否則可以加上一些不發生作用 (dummy) 的數串，強迫使數串個數為費氏數列中的一個數值。

34 是 13 與 21 的和。這兩個數告訴我們如何把 34 個數串分開存在兩條磁帶：磁帶 B 與磁帶 C 上。磁帶 B 含有 34 個數串，把其中 21 個轉移至磁帶 C 上，得以下結果：

磁帶 A 包含有原來隨意排列的數字 (我們把它叫做“空” (blank) 磁帶，原因稍後自明)。

磁帶 B 含有 13 個數串。

磁帶 C 含有 21 個數串。

下面是磁帶 B 與磁帶 C 上所發現的數串：

磁帶 B

6 18 62 71 72 82 83 91 95 111 112/

1 3 116/

36 123/

50/

47 122 129/

17 140/

137/

81 118/

66 131 147/

27 148 150/

5 86/

9 87/

55 154/

磁帶 C

38 73 78/

54 143 158 161/

34 155/

65 165 166/

144/

136 167/

125/

23 32/

21 170/

142/

121 172/

159/

64 174 177/

149 164/

11 52 134/

7 25 102 135 178/

90 151/

24 56 132/

80/

39 179/

30 33 67 180 183 184 185 186 187 188 190 192

193 194 195 198 199 200/

在磁帶 B 及磁帶 C 上的數串都是一個跟着一個的沒有間斷。爲了討論排序的方便，所以把數串分開寫，一個數串一行。

下一步是把磁帶 B 與磁帶 C 上所找到的數串作合併，合併好以後的數串放在磁帶 A 上。現在讓我們來看看磁帶 B 上第一個數串以及磁帶 C 上第一個數串。

磁帶 B

6 18 62 71 72 82 83 91 95 111 112/

磁帶 C

38 73 78/

因爲兩個數串本身均已排好順序，所以不需要在記憶體中再把它們排序。這兩個數串經過合併以後的新數串便寫在磁帶 A 上。

磁帶 A 得到了兩個數串合併的新數串。此新數串爲

磁帶 A

6 18 38 62 71 72 73 78 82 83 91 95 111 112/

此數串中共有 14 個數。(其中 11 個數來自同一數串中，其他 3 個在另一數串)。

現在把磁帶 B 的第二個數串與磁帶 C 的第二個數串合併。此二數串爲

磁帶 B

1 3 116/

磁帶 C

54 143 158 161/

磁帶 A 得到的數串是

1 3 54 116 143 158 161/

這種處理要繼續到甚麼時候呢？直到磁帶 B 上所有數串皆處理完畢為止。那時我們就說磁帶 B 是“空”的了。事實上磁帶 B 中仍有原來數串，不過對我們以後的處理而言，它已不再有任何用處。當磁帶 B 成了空磁帶以後，磁帶 C 仍有 8 個未處理的數串（原有 21 個，少了的 13 個是與磁帶 B 的 13 個相合併）。磁帶 A 含有 13 個合併的數串。

磁帶 B 成爲“空”的以後，各磁帶情形如下：

磁帶 A 含有 13 個合併數串（由磁帶 B 及磁帶 C 得來）。磁帶 A 上原來記錄的資料當新的資料寫上去以後已遭洗去。

磁帶 B 空的。

磁帶 C 含有 8 個數串，至目前爲止尚未能有與其他數串合併的機會。

下面是由磁帶 A 與磁帶 C 上所發現數串。

磁帶 A

6 18 38 62 71 72 73 78 82 83 91 95 111 112/

1 3 54 116 143 158 161/

34 36 123 155/

50 65 165 166/

47 122 129 144/

17 136 140 167/

125 137/

23 32 81 118/

21 66 131 147 170/

27 142 148 150/

5 86 121 172/

9 87 159/

55 64 154 174 177/

磁帶 C

149 164/

11 52 134/

7 25 102 135 178/

90 151/

24 56 132/

80/

39 179/

30 33 67 180 183 184 185 186 187 188 190 192

193 194 195 198 199 200/

磁帶 A 有 13 個數串；磁帶 C 有 8 個。這兩個數也是在費氏級數中可以找得到的：

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

這並不是巧合。只要有數串的個數（本例中爲 34）按照費氏數列的辦法把它分配到兩卷磁帶上去，那麼數串在合併時所產生新數串的個數必爲費氏數列中的一數。（在排序過程中，通常磁帶所含有數列個數是愈來愈少，而數串本身是愈來愈長。）

下一步是把磁帶 A 與磁帶 C 上所找到數串作合併，把結果抄到“空”磁帶上，也就是磁帶 B 上。

繼續作合併，直到磁帶 C 上的數串皆已處理過爲止。到那個時候我們就把磁帶 C 定爲“空”磁帶。磁帶 B 將含有 8 個數串（是由磁帶 A 及磁帶 C 合併得來）而磁帶 A 將含有 5 個數串（至目前爲止尚未能有與其他數串合併的機會）。

兩條非空的磁帶，磁帶 A 與磁帶 B 中所含的數串個數可以預言各爲 5 與 8。這是兩個可以在費氏數列中找到的數。磁帶 A 與磁帶 B 的內容如下：

磁帶 A

21 66 131 147 170/
 27 142 148 150/
 5 86 121 172/
 9 87 159/
 55 64 154 174 177/

磁帶 B

6 18 38 62 71 72 73 78 82 83 91 95 111 112 149 164/
 1 3 11 52 54 116 134 143 158 161/
 7 25 34 36 102 123 135 155 178/
 50 65 90 151 165 166/
 24 47 56 122 129 132 144/
 17 80 136 140 167/
 39 125 137 179/
 23 30 32 33 67 81 118 180 183 184 185 186 187 188
 190 192 193 194 195 198 199 200/

對於合併我們不再作更詳細的討論，但是你如果能自己把它作完，你將會獲益不少。這些由磁帶至磁帶間一系列數串至排序完成為止的作業情形綜論如圖八至十五。輪流擔任“空”磁帶的磁帶是磁帶 A，磁帶 B，磁帶 C，磁帶 A... 等。磁帶上數串的個數愈來愈少，最後兩卷磁帶上都只剩下了一個數串。結果是把這兩個數合併，排序終告完成。下面是磁帶 A 上所發現的數串：

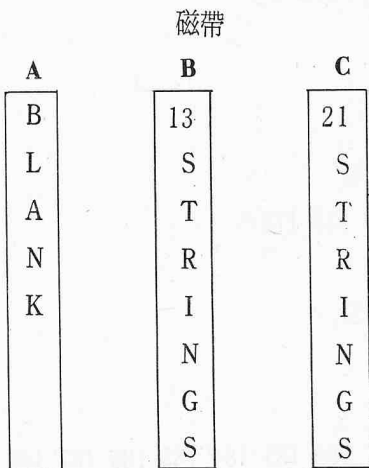


圖 八

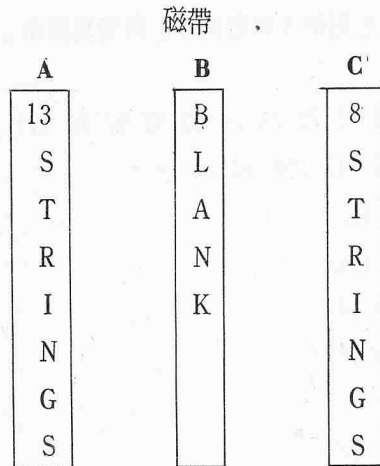


圖 九

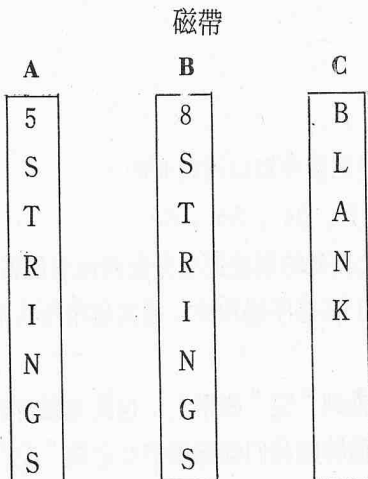


圖 十

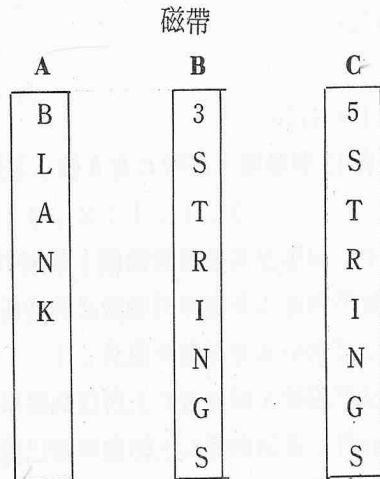


圖 十一

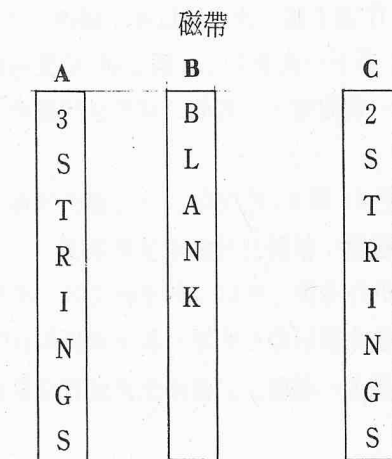


圖 十二

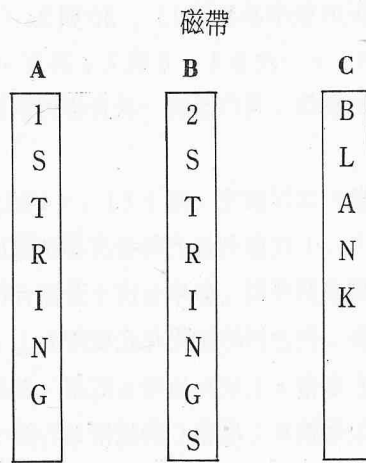


圖 十三

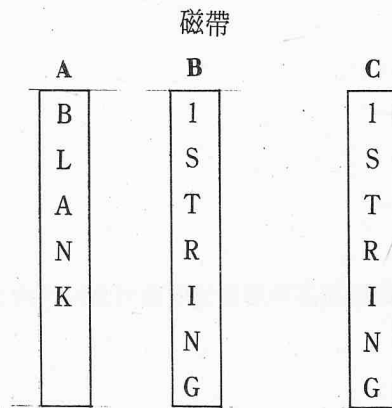


圖 十四

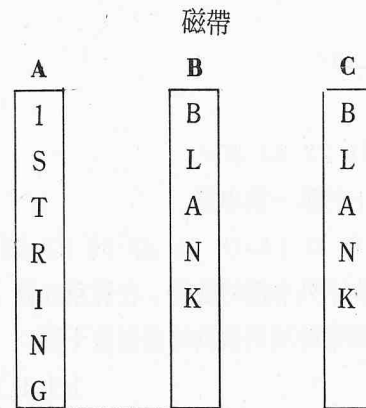


圖 十五

1 3 5 6 7 9 11 17 18 21 23 24 25 27 30 32
 33 34 36 38 39 47 50 52 54 55 56 62 64
 65 66 67 71 72 73 78 80 81 82 83 86 87
 90 91 95 102 111 112 116 118 121 122 123 125
 129 131 132 134 135 136 137 140 142 143 144 147 148 149
 150 151 154 155 158 159 161 164 165 166 167 170 172 174
 177 178 179 180 183 184 185 186 187 188 190 192 193 194
 195 198 199 200

一共合併了 33 對數串，比原有數串總數少一。這種關係永遠為真。當真有數串個數為 89 時，合併數串對數為 88；原有數串個數為 144 時，合併數串對數為 143 等。

處理數串所用磁帶愈多則費氏磁帶排序法愈為有效。茲以四條磁帶為例說明於後。此四條磁帶以磁帶 A，磁帶 B，磁帶 C，磁帶 D 名之。

假設由比賽法所產生數串個數為 57，必需把它們放在三卷磁帶上（第四卷為空磁帶）。正確的分配法是磁帶 B 接受 13 個數串，磁帶 C 接受 20 個數串，磁帶 D 接受 24 個數串。這些數字是由下面數列求得：

1 1 1
 1 2 2
 2 3 4
 4 6 7
 7 11 13
 13 20 24
 24 37 44
 44 68 81
 etc.

最初分配的數串個數為 13，20 與 24（共 57 個數串）。作過了第一次合併以後，磁帶中各有 7, 11 與 13 個數串；下一次是 4，6 與 7；再下一次是 2，3 與 4；再下一次是 1，2 與 2 等。結果每條磁帶上都是只有一個數串，再作最後一次合併得到單獨一個數串放在一條磁帶上。其他三條都是空磁帶。排序終告成。

把以上數列加以擴充，寫下 81，44 加上 81 得 125。再把 68 與 81 相交得 149。擴充所得三數為 81，125 與 149。（此數列擴充時每次都是增加三個數）。如此繼續，該數列可擴充至無限項。

用四條磁帶排序時，數串合併不是兩合併，而是三個一組的作合併。所以，如果磁帶 B，磁帶 C 與磁帶 D 要作合併，把合併的結果存在磁帶 A 上，則磁帶 B 的第一數串與磁帶 C 的第一數串與磁帶 D 的第一數串合併後放在磁帶 A 上成為磁帶 A 的第一數串。如此繼續，直至某一磁帶上之數串全部處理完畢為止。

例如，設磁帶 B，磁帶 C 與磁帶 D 的第一數串為：

磁帶 B

6 14 18 32/

磁帶 C

3 4 50/

磁帶 D

13 21 22 33 35/

存在磁帶 A 上的第一數串為

3 4 6 13 14 18 21 22 32 33 35 50/

讀者試作下列有趣的練習，在利用五條，六條，七條……磁帶排序時所決定的數列為何？例如，下面是使用五條磁帶時所用數列的最初若干項：

```

1 1 1 1
  1 2 2 2
    2 3 4 4
      4 6 7 8
        etc.

```

下面是使用六條磁帶時所用數列的最初若干項：

```

1 1 1 1 1
  1 2 2 2 2
    2 3 4 4 4
      4 6 7 8 8
        etc.

```

試試看你能不能把這些數列的規則列出。