群論的重大突破

林 克 瀛　清華大學物理系

（節譯自 1980 年 6 月號 *Scientific American* 之 Mathematical Games by Martin Gardner ）

過去六年中全世界各地的數學家都在努力想捕捉一個被稱爲怪獸 monster 的羣。這個羣的元素多得驚人，一共是 808，017，424，794，512，875，886，459，904，961，710，757，005，754，368，000，000，000 也可以寫成：
$2^{46}\times3^{20}\times5^{9}\times7^{6}\times11^{2}\times13^{3}\times17\times19\times23\times29\times31\times41\times47\times59\times71$。1980 年一月美國密西根大學的數學教授格來士（ Robert L.Griess，Jr. ）在休假期間在普林斯敦高等研究所證明這個怪獸（數學家稱之爲 F_1 ）的確存在，他把這個群實際的造了出來，也就是說他把這個群的所有元素及它們之間的關係完全寫了下來。這個消息對研究群論的數學家來說是十分興奮的，因爲一百多年來數學家一直在追求一個目標——如何把所有各種的群加以分類。現在這個目標似乎快要達到了。

這個多采多姿的故事是以一聲槍響開始的。1832 年法國的天才數學家及激進的學生加羅華（ Evariste Galois）在一次無聊的決鬥中被槍殺，起因是爲了一位女士。他死時還未滿 21 歲。群論在以往已經有過一些零碎的結果，但加羅華把近代群論打下了基礎並且給它取了名字，他的工作完全寫在死前一晚的一封長信上。（他的生平請參閱「數學傳播」四卷三期 P. 80 。）

首先讓我們考慮一個例子。例如你在操場上立正站著並而要遵守下面四個命令來行動：「不動」，「左轉」，「向後轉」，「右轉」。假定你先左轉再向後轉，這種情形叫做兩個運算相乘。請注意上述兩個運算的乘積與一個單獨的運算「向右轉」完全相同。這一組的四個運算構成了一個群，是因爲它們滿足下列四個群的公設（ axiom ）：

一、關閉性（closure）：任何一對運算（可以是同樣的運算）的乘積相當於同一組中的某一個單獨的運算。但一般說來乘積與次序有關，若元素以 $A\,B\,C$ 等符號代表，則一般而言 $AB\neq BA$。

二、結合律：即（ AB ）$C=A$（ BC ）。換句話說，若運算 A 和 B 的乘積以（ AB ）表示，則繼續乘以運算 C 的乘積相等於 A 乘以（ BC ）。

三、單位元素的存在：群中只有一個元素（通常以符號 I 代表）具有這樣的性質 $IA=AI=A$。相當於上述例子中的「不動」，這個運算實際上沒有任何作用。

四、逆元素的存在：任何一個運算都有一個逆運算存在使得它們的乘積等於單位元素。通常 A 的逆元素以 A^{-1} 代表，即 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。例如上述例子中先左轉再右轉等於先右轉再左轉，又等於立正不動。

上面介紹的四個口令稱爲四階循環群（ cyclic 4－group ），因爲這個群也可以代表把四件物體放在一排加以循環置換。所謂循環置換又稱輪換，其意義如下：把一組物體有次序的放在一排，輪換時把第一

件物體移放到第二個位置，而把原放在第二位的物體移到第三位，如此類推，最後把末了的物體移放到第一位。以四階循環群為例，先把四件物體分別用1 2 3 4來標明，並假定依照順序1 2 3 4排成一排，單位元素代表不作任何移動並以I代表。元素A表示把物體輪換到4 1 2 3的位置，元素B代表輪換到3 4 1 2的順序，而元素C代表輪換到2 3 4 1。這個群完全可以用圖一中的乘法表來表示出來。其意義如下：若$AB=C$，則A放在表的左邊，B放在表的上面，C放在表當中對應的位置，即直行和橫排交叉的位

	I
I	I

	I	A
I	I	A
A	A	I

二階循環羣

	I	A	B
I	I	A	B
A	A	B	I
B	B	I	A

三階循環羣

	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	B	C	I
B	B	C	I	A
C	C	I	A	B

四階循環羣

	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	I	C	B
B	B	C	I	A
C	C	B	A	I

四階克來恩羣

圖一：羣的乘法表

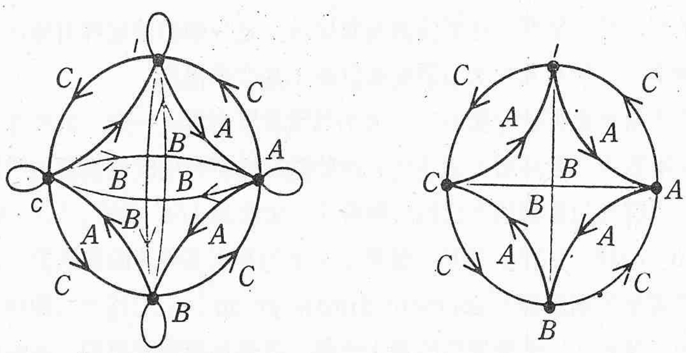
置。$IABC$也可以分別解釋為「不動」「左轉」「向後轉」及「右轉」這四個口令。由一到四階的群的乘法表如圖一所示。由圖一可以看出來由一到三階的群都是循環群，而四階的群却有兩種，其中一個是四階循環群，另外一個叫做四階克來恩群（Klein）。圖一乘法表對於沿由左上到右下角的對角線是對稱的。換句話說，任意一對元素均滿足$AB=BA$，這一類的群又稱為可交換群或亞倍爾群。（紀念挪威數學家Niels Henrik Abel）。n階循環群屬於亞倍爾群，每一元素相當於把一個正n邊形旋轉$360/n$度。

最簡單的非亞倍爾群是三度置換群，它的乘法表沒有上述的對稱性質。一個n度置換群的元素相當於把n個不同的物體排成一列後再加以任意置換。一個三度置換群也可以作如下的解釋：把一個正三角形旋轉及翻身，共有六種方法，每一種方法相當於群的一個元素。

英國數學家凱利（Arthur Cayley）想出一種以圖形來代替乘法表的法子，稱為凱利圖。

四階循環群的凱利圖如圖二所示。左圖是凱利圖原來的樣子（原文中每條線用顏色印出，為了方便起

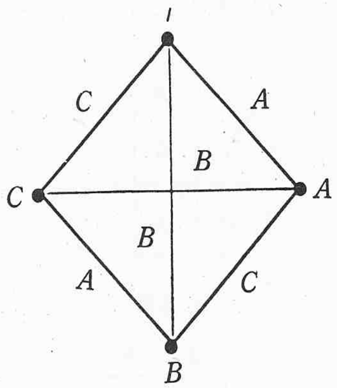
	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	B	C	I
B	B	C	I	A
C	C	I	A	B



圖二：四階循環的凱利圖

見改爲以符號註明）。圖中四個點代表群的四個元素。兩點之間用兩根帶有箭頭的曲線相連，線上並註明符號，其意義如下：以由B到A的曲線爲例，線上的符號是C，由圖二的乘法表上，左方屬於B的那一橫排中找出A，而由A往上看可知屬於C，換句話說，$BC=A$。右圖是簡化後的凱利圖。上式也可寫成$B=AC^{-1}$，若連接A與B的兩條線所代表的元素不同（即$C\neq C^{-1}$）則其一必爲另一元素的逆元素，當$C=C^{-1}$時，在簡化凱利圖中把兩條A和B間的連線合併爲一條（不再加上箭頭）。又因$AI=A$，由任何元素出發而又回到圖一元素的環線必代表I（單位元素），在簡化圖中一律省去環線。四階克來恩群的簡化凱利圖如圖三所示。

	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	I	C	B
B	B	C	I	A
C	C	B	A	I



圖三：四階克來恩羣的簡化凱利圖

若一個群中一部份元素自己構成一個群（但不算只有一單位元素的特例），此群稱爲子群（Subgroup）。例如上述克來恩群有下列三個子群：（I，A）（I，B）（I，C）。

無限群的元素有無窮多，可分爲兩類，一類稱斷續群（diserete group），元素可以照1，2，3，……等自然數順序排列，另一類稱連續群（continuous group），其元素是無法數的，例如由0到1之間所有的實數有無限多，是不能數（uncountable）的。對加法而言，整數構成一個斷續的亞倍爾群，以0作單位元素，而所有實數則爲連續群。對數字的乘法而言非零實數也構成一個連續群以1爲單位元素。爲了紀念挪威數學家李（Marius Sophus Lie），連續群又稱爲李群。李群的分類由法國數學家卡當完成，但有限群的分類却意外的困難，不過自從怪獸被捕以後有限群的分類已將近完成，對群論的研究者而言這是一個大新聞。

所有的有限群都由一些叫做簡單群（simple group）的群組成，正如化學告訴我們一切化合物都由元素組成一樣。數學上稱一個沒有「正常」（normal）子群的群爲簡單群。所謂「正常」的意義如下：假定一個群G有一個子群S，由G中任選一元素A和S中所有元素一一相乘所得的集合稱爲右旁系（right coset）以AS表示，通常旁系中的元素不構成子群。如次序反過來得左旁系以SA表示。如右旁系中的元素與左旁系相同，則S稱爲G的正常子群。例如三階循環群爲三度置換群的正常子群。要將有限群分類，只要把有限簡單群分類就大功告成了。

法國人拉果蘭朱（Lagrange）證明子群的階數必須是母群階數的因子，而質數沒有因子，因此階數爲質數的群必爲簡單群，由於質數有無限多，這一類的簡單群有無限多，它們都是循環群（任何循環群都是亞倍爾群）。所有其他的有限簡單群都不是亞倍爾群。

在有限簡單群的分類中，上述的循環群單獨構成一類，此外還有十六類，每一類本身包含有無限多個群。其階數由六十開始（這是由五個物體交換排列所成置換群的子群，也可解釋成把一個正十二面體或者正二十面體加以旋轉所形成的對稱群），依次爲168，360，504，660，1092，2448，2520，3420，4080，5616，6048，6072，7800，等等。不幸的是有某些有限簡單群（非亞倍爾群）不屬於任何一類，數學家稱之爲零星的簡單群（sporadic Simple group）。上述十六類中有一類以A_n表示，其階數爲$n!/2$（n由五開始），是置換群的最大子群，這是加羅華發現的，並由此推出五次或超過五次的一元多次方程

式的解不可能以根式表示，解決了困惑數學家幾百年的難題。

數學家有強大的理由相信（但尚未能證明）零星的簡單群除了已經找到的 26 個外再也沒有了。在十八世紀的六十年代法國數學家馬修（ Emile Leonard Mathieu ）首先發現五個，最小的以M_{11}表示共有 7920 個元素（也是 26 個群中階數最少的），由十一個物體的某些置換所形成。一世紀後於 1965 海德堡大學的楊可（ Evonimir Janko ）發現第六個。三年後劍橋大學的康威（ John Horton Conway ）又找到三個，他的研究工作是基於李取格子而來，這是英國數學家李取（ John Leech ）所設計的，他想法在

NAME OF GROUP	NUMBER OF ELEMENTS	DISCOVERED BY
M_{11}	$2^{4} \times 3^{2} \times 5 \times 11$	Mathieu
M_{12}	$2^{6} \times 3^{3} \times 5 \times 11$	
M_{22}	$2^{7} \times 3^{2} \times 5 \times 7 \times 11$	
M_{23}	$2^{7} \times 3^{2} \times 5 \times 7 \times 11 \times 23$	
M_{24}	$2^{10} \times 3^{3} \times 5 \times 7 \times 11 \times 23$	
J_{1}	$2^{3} \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19$	Janko
J_{2}	$2^{7} \times 3^{3} \times 5^{2} \times 7$	Hall, Wales
J_{3}	$2^{7} \times 3^{5} \times 5 \times 17 \times 19$	Higman, McKay
J_{4}	$2^{21} \times 3^{3} \times 5 \times 7 \times 11^{3} \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 43$	Benson, Conway, Janko, Norton, Parker, Thackray
HS	$2^{9} \times 3^{2} \times 5^{3} \times 7 \times 11$	Higman, Sims
MC	$2^{7} \times 3^{6} \times 5^{3} \times 7 \times 11$	McLaughlin
Sz	$2^{13} \times 3^{7} \times 5^{2} \times 7 \times 11 \times 13$	Suzuki
C_{1}	$2^{21} \times 3^{9} \times 5^{4} \times 7^{2} \times 11 \times 13 \times 23$	Conway
C_{2}	$2^{18} \times 3^{6} \times 5^{3} \times 7 \times 11 \times 23$	
C_{3}	$2^{10} \times 3^{7} \times 5^{3} \times 7 \times 11 \times 23$	
He	$2^{10} \times 3^{3} \times 5^{2} \times 7^{3} \times 17$	Held, Higman, McKay
F_{22}	$2^{17} \times 3^{9} \times 5^{2} \times 7 \times 11 \times 13$	Fischer
F_{23}	$2^{18} \times 3^{13} \times 5^{2} \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 23$	
F_{24}	$2^{21} \times 3^{16} \times 5^{2} \times 7^{3} \times 11 \times 13 \times 17 \times 23 \times 29$	
Ly	$2^{[illegible]} \times 3^{7} \times 5^{6} \times 7 \times 11 \times 31 \times 37 \times 67$	Lyons, Sims
O	$2^{9} \times 3^{4} \times 5 \times 7^{3} \times 11 \times 19 \times 31$	O'Nan, Sims
R	$2_{14} \times 3^{3} \times 5^{3} \times 7 \times 13 \times 29$	Conway, Rudvalis, Wales
F_{5}	$2^{14} \times 3^{6} \times 5^{6} \times 7 \times 11 \times 19$	Conway, Fischer, Harada, Norton, Smith
F_{3}	$2^{15} \times 3^{10} \times 5^{3} \times 7^{2} \times 13 \times 19 \times 31$	Smith, Thompson
F_{2}	$2^{41} \times 3^{13} \times 5^{6} \times 7^{2} \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 31 \times 47$	Fischer, Leon, Sims
F_{1}	$2^{46} \times 3^{20} \times 5^{9} \times 7^{6} \times 11^{2} \times 13^{3} \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71$	Fischer, Griess

表一　二十六個零星的有限簡單羣

24 維空間中解決如何把單位超球體（ unit hypersphere ）用最省地方的方法疊在一起的問題（結果是每一球和其他 196560 個球相接觸）。李取是在研究通訊時所用能自動改正的電碼（ error-correcting code ）時發現他的格子。原來這種電碼和某些零星群有關，例如五個馬修的零星群中的兩個M_{23}和M_{24}與軍隊中使用的高利（ Golay ）電碼有關。

在 1980 年開始時，數學家已發現了 24 個零星群，並且相信還有兩個J_4 和F_1 也是。其中J_4 是 1975 由楊可所猜測，而於1980二月由劍橋大學的一群數學家本生（ David Benson ）， 康威，諾頓（ Simon P. Norton ）; 派克（ Richard Parker ） ，柴克雷（ Jonathan Thackray ）共同發現的。F_1 就是怪獸，也是最大的零星群，是 1973 由格來士及比非耳德（ Bielefeld ） 大學的費雪（ Bernd Fischer ）分別猜測的，而於 1980 一月由格來士單獨找到。許多比F_1 小的零星群需要用電子計算機的幫助來造同時又包含在F_1 群內，只要F_1 能證明的確存在則這些小的群也自然一定存在。最令人驚奇的是格來士只用紙和筆就能把F_1 造出來，它是根據在 196，883 維空間中的一個對稱旋轉群而來！

大部份的群論專家都相信零星群只有 26 個，但要證明這一點却無比困難。估計詳細的證明印出來需要一萬頁之多。不過值得一提的是群論上的證明一般都很長。例如湯普生（ John Thompson ）和費特（ Walter Feit ）整整用了兩百五十頁來證明邊塞（ William Burnside ） 有名的猜想：所有非亞倍爾簡單群的階數必爲偶數（他們論文中還證明了一些其他的定理），這篇論文佔去了整期的太平洋數學期刊（ The Pacific Journal of Mathematics，1963 年十三卷 775 到 1029 頁）。

1972 年美國的鹿格斯 (Rutgers) 大學的高侖斯坦 (Daniel Gorenstein) 列出了一個十六步的計劃來完成有限簡單群的分類。後來加州理工學院的阿許巴克 (Michael Aschbacher)又把這份計劃加以改良 (他並在 1950 一月獲得代數學中著名的柯爾 (Cole)奬) 。1972 年五月高侖斯坦告訴紐約時報說他由 1959 起研究有限簡單群的分類，每年工作五十二週，每週七天每天工作五小時。他說：「我要解決這個問題，不是由於對人類有什麼好處，只是因爲我要想這麼做。」他現在覺得一兩年內工作可以完成。