質因數的識別法

薛昭雄 政治大學應用數學系

我們大家都熟悉下面質因數的識別法：（註一）

1. 若一個自然數的個位數字是 0 ，2 ，4 ，6 ，8 中的一數字，這自然數就有質因數 2 ，否則，這自然數就沒有質因數 2 。
2. 若一個自然數的個位數字是 0 或 5 ，這自然數就有質因數 5 ，否則，這自然數就沒有質因數 5 。
3. 若一個自然數各位數字的和可被 3 整除，則這自然數就有質因數 3 ，否則，這自然數就沒有質因數 3。
4. 若一個自然數從個位起，由右到左，各奇數位數字的和與各偶數位數字的和，相減所得的差可被 11 整除，這自然數就有質因數 11 ，否則這自然數就沒有質因數 11 。

很自然地，我們會產生如下的問題：

1. 除了上述 2 ，3 ，5 ，11 的質因數的識別法外，對於其他的質因數在不可直接試除之限制下，有沒有類似的識別法？
2. 我們知道對於每一種質因數都有不同的識別法，那麼是不是存在有一種共同的識別法呢？

在科學教育第九期中，黃來興先生曾給過另外一種識別法，但仍然未能回答第二個問題。本文的目的，就是想回答上述的二個問題：

由質數的性質，我們知道，除了 2 ，5 之外，任意質因數的個位數字必是 1 ，3 ，7 ，9 中的一數字。因此，若以 P 表任意一個質因數，則下列二式成立。其一：

$$p = 10k \pm 1 ,$$
$$3p = 10k \pm 1$$

詳細地說：

個位數字是 1 的質因數必呈 $p = 10k + 1 \quad k \in N$

個位數字是 3 的質因數必呈 $3p = 10k - 1 \quad k \in N$

個位數字是 7 的質因數必呈 $3p = 10k + 1 \quad k \in N$

個位數字是 9 的質因數必呈 $p = 10k - 1 \quad k \in N$

利用上面的發現，我們可以得到下面的定理：

定理1. 令 $m \in N$ ，$m = a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 + a^0$ 又令 $P = 10k + 1$ 或 $3P = 10k + 1$

若

$$P \mid [\,(a_n 10^{n-1} + 111 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1) - k a_0\,] ,$$

則

$$P \mid (a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0) ,$$

即

$$P \mid m$$

證明：

由假設知

$$P \mid [\,(a_n 10^{n-1} + 111 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1) - k a_0\,]$$

$$\Rightarrow \quad P \mid 10[\,(a_n 10^{n-1} + 1n + a_2 10^2 + a_2 10 + a_1) - k a_0\,]$$

註一：國民中學數學第一冊

即

$$p \,/\, (a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 - 10ka_0)$$

或

$$p \,/\, [a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 - a_0(10k+1)]$$

因 $p = 10k+1$ 或 $3p = 10k+1$

故得

$$p \,/\, (a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 - a_0 p) \tag{1}$$

或

$$p \,/\, (a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 - 3a_0 p) \tag{2}$$

因 $p \neq 3$，且 $p \not/ -a_0 p$ 或 $p \not/ -3a_0 p$

故由(1)與(2)可得

$$p \,/\, (a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)$$

即

$$p \,/\, m$$

依照定理 1 的證明，我們可得

定理 2. 令 $m \in 5N$，$m = a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

又令 $p = 10k-1$ 或 $3p = 10k-1$

若

$$p \,/\, [(a_n 10^{n-1} + 111 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1) + ka_0],$$

則

$$p \,/\, (a_n 10^n + 111 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_9),$$

即

$$p \,/\, m$$

定理 1. 與定理 2. 提供了質因數之識別的一般方法。它的步驟是：

1. 將質因數表成 $p = 10k \pm 1$ 或 $3p = 10k \pm 1$。
2. 將欲檢驗之自然數 m 去掉個位數字 a_0 得一新的自然數 m'
3. (A) 若 $p = 10k+1$ 或 $3p = 10k+1$，則計算 m' 減去 ka_0 之值 ℓ。若 p / ℓ，則 p/m
   (B) 若 $p = 10k-1$ 或 $3p = 10k-1$，則計算 m' 加上 ka_0 之值 h；若 p / t，則 p / m。

例

(1) 714 有沒有質因數 17？

因 $3 \times 17 = 51 = 10 \times 5 + 1$，即 $k = 5$，

所以

$71 - 5 \times 4 = 51$

因 $17 / 51$

故 714 有質因數 17

(2) 683 有沒有質因數 3？

因 $3 \times 3 = 9 = 10 \times 1 - 1$，即 $k = 1$

所以

$68 + 3 \times 1 = 71$

而 $3 \not/ 71$

故 683 沒有質因數 3

(3) 722 有沒有質因數 19？

因 $19 = 10 \times 2 - 1$，即 $k = 2$

所以 $72 + 2 \times 2 = 72 + 4 = 76$

而 $19 / 76$

故 $19 / 722$

即 722 有質因數 19

(4) 3582 有沒有質因數 3？

因 $3 \times 3 = 9 = 10 \times 1 - 1$，即 $k = 1$

所以 $358 + 2 \times 1 = 360$

因 $3 / 360$

故 $3 / 3582$

如果欲檢驗的自然數較大時，我們可重複其步驟：

(5) 7397 有沒有質因數 13？

因

$$3 \times 13 = 39 = 10 \times 4 - 1$$

所以

$$739 + 4 \times 7 = 767$$

又

$$76 + 4 \times 7 = 104$$

$$10 + 4 \times 4 = 26$$

因

$$13 / 26$$

故 $13 / 7397$

(6) 13708 有沒有質因數 23？

因

$$3 \times 23 = 69 = 10 \times 7 - 1$$

所以

$$1370 + 7 \times 8 = 1426$$

$$142 + 7 \times 6 = 184$$

$$18 + 7 \times 4 = 46$$

因

$$23 / 46$$

故

$$23 / 13708$$

上面的方法可以把它改成下面一種單純的形式，至於是否較原先為簡單，則當視各人應用之妙了。

因為質因數的個位數字必 1，3，7，9 中之一數字，因此若 3 p 表任意一個質因數，則必存在一個正整數 n 使得

$$np = 10k + 1, \ k \in N$$

是故，質因數識別的一般方法的步驟就是：

1. 將質因數表成 $np = 10k + 1$
2. 將欲檢驗之自然數 m 去掉個位數字 a_0 得新的自然數 m'
3. 計算 $m' - ka_0 = \ell$ 之値　若 p / ℓ，則 p / m

例(7) 683 有沒有質因數 3？

因　$7 \times 3 = 21 = 2 \times 10 + 1$，　即　$k = 2$

所以　$68 - 2 \times 3 = 62$

因　$3 \not/ 62$

故　683 沒有質因數 3

註：例(2)與例(7)為同一題目，但處理方法不同。

後記：讀者或許認為上述方法較直接試除並不見為簡捷，如果有此觀點，則已失本文撰寫之動機了。

參考文獻

〔1〕 yazbak, N. *some Unsual Tests of Divisihility*, Math Teacher 69 (Dec 1976) P 667 − 68