數學理論

簡易線性代數(二)

行　列　式

賴漢卿　清華大學數學系

上一節我們對於向量與矩陣已有了概念，爲了學習綫性變換的連續性或其範數，乃提本節的主題行列式。此外行列式在解聯立一次方程式，討論向量的綫性獨立，綫性相關，矩陣的秩以及固有值等問題，都與行列式有相當密切的關係。本節所舉矩陣之元素雖然在複雜數體中也成立，但爲了方便起見，矩陣中之元素都設爲實數。

2－1　偶排列與奇排列

n個文字依1，2，…，n之順序，任意排成ν_1，ν_2，…，ν_n之順序〔即ν_i是｛1，2，…，n｝中之某一整數，且$\nu_i \neq \nu_j$（$i \neq j$）〕的排列法就有$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$個方法，在這些排列法中，有偶排列與奇排列兩種。關於偶排列與奇排列有種種不同的定義方式（都是等價的）。我們選用下面差積的概念來定義。如設n個變數x_1，x_2，…，x_n寫成其兩的差積

$$
\begin{aligned}
\triangle \equiv \triangle(1,2,\cdots,n) &= \pi_{i<j}(x_i - x_j) \\
&= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots\cdots(x_1 - x_n) \\
&\qquad (x_2 - x_3)\cdots\cdots(x_2 - x_n) \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad (x_{n-1} - x_n)
\end{aligned}
$$

稱爲x_1，x_2，…，x_n的差積。其中足碼都是按1，2，…　n之前後次序排成，當中任何因式（$x_i - x_j$）的i都比j小。換句話說，這些因式中無任何一個逆序發生。我們且看下面定義

定義，若排列（ν_1，ν_2，…，ν_n）若滿足

$$\triangle(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n) = \triangle$$

時，稱此排列爲**偶排列**。又若

$$\triangle(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n) = -\triangle$$

時，稱此排列爲**奇排列**

例：　$n = 4$時，

$$
\begin{aligned}
&\triangle = \triangle(1,2,3,4) \\
&\quad = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(n_3 - x_4)
\end{aligned}
$$

而　$\triangle(2,4,1,3) = (x_2 - x_4)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)(x_4 - x_3)(x_1 - x_3)$

$$= (x_2 - x_4)\cdot(-1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\cdot(-1)(x_1 - x_4)$$
$$\cdot(-1)(x_3 - x_4)(x_1 - x_3)$$
$$= (-1)^3 \triangle = -\triangle$$

所以　$(2,4,1,3)$為奇排列。

又

$$\triangle(4,1,3,2) = (x_4 - x_1)(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)$$
$$= (-1)(x_1 - x_4)(-1)(x_3 - x_4)(-1)(x_2 - x_4)(x_1 - x_3)$$
$$(x_1 - x_2)(-1)(x_2 - x_3)$$
$$= (-1)^4 \triangle = \triangle$$

所以　$(4,1,3,2)$為偶排列。

由上例我們知道$\triangle(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$不是等於△就是等於$-\triangle$，這是由$(\nu_1,\nu_2)$，$(\nu_1,\nu_3)$，$\cdots$，$(\nu_{n-1},\nu_n)$一共有$\{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\}$個數對中，視與自然順序相反的個數(也稱爲**逆序**個數)是偶數個或奇數個而定。故偶、奇排列也可由逆序之個數爲偶、奇來定。換句話說，二文字互換位置，使成自然序$(1,2,\cdots n)$之互換個數爲偶數次或奇數次而定排列之爲偶排列或奇排列。

2－2 行列式之定義及性質

在$n\times n$矩陣，即方陣

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中之各行各列分別取一數作乘積，必可得一數

$$a_{1\nu_1}\ a_{2\nu_2}\cdots a_{n\nu_n}$$

其中$(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$是$(1,2,\cdots,n)$的一種排列，因此這一種積的形式共有$n!$個。如果$(V_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$ 爲偶排列，則取其符號爲“＋”，若爲奇排列，則取其符號爲“－”，這n個積的和寫作

$$\Sigma(\pm)\,a_{1\nu_1}\ a_{2\nu_2}\cdots a_{2\nu_n} \text{或} \Sigma\, Sgn\begin{pmatrix} 1\ 2\cdots n \\ \nu_1\nu_2\cdots\nu_n \end{pmatrix} a_{1\nu_1}\ a_{2\nu_2}\cdots a_{n\nu_n}$$

稱爲方陣A的**行列式**，通常行列式記作

$$det\,A \equiv \|A\| \equiv |A| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因A爲$n\times n$方陣，故$|A|$ 也稱爲**n 階行列式**，上式$Sgn\begin{pmatrix} 1\ 2\cdots n \\ \nu_1\nu_2\cdots\nu_n \end{pmatrix}$寫作$\sigma(\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_n)$表示“＋”或“－”，就看排列$(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$對於$(1,2,\cdots,n)$是偶排列或奇排列而定。

例 1．二階行列式

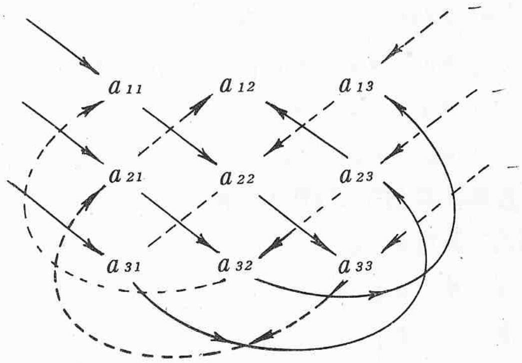
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

簡記的技巧可作對角綫之乘積，往右下↘爲正，往左下↙爲負。

例 2．三階行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

對於三階行列式展開的技巧可用下法來認識：



$\searrow$ 方向之積（有3項）爲正

$\swarrow$ 方向之積（有3項）爲負

或寫成

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

正負之積視 $\searrow$，或 $\swarrow$ 而定。

其記法是把第一、二行寫在原行列式之右。以上這些方法只特定於二階及三階之行列式。四階以上之行列式（若四階則有 $4! = 24$ 項）就不能適用了，雖如此，我們用小行列式或餘因式可將原行列式之階數逐漸降低，然後利用三階以下的行列式來計算。爲了計算行列式，我們得瞭解行列式所具有的性質。下面所述行列式之性質都以三階爲代表，一般 n 階行列式亦適用。

一 $m\times n$ 矩陣 A 的行與列對換；即第 i 行（$i=1,2,\cdots,n$）換成第 i 列、第 k 列換成第 k 行（$k=1,2,\cdots,m$）所成之矩陣記作 A^t 則 A^t 是一 $n\times m$ 矩陣，我們稱 A^t 爲 A 的**轉置**，英文稱作 *transpose*，A^t 的 t 就是此英文名稱的第一個字母。即

若
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad 則\ A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

討論行列式時，都以方陣 $n\times n$ 爲對象。由行列式的定義我們不難得下列有關行列式之諸性質

1　行列式的轉置，其值不變，即 $|A^t| = |A|$。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2　行列式之二行（或二列）互換，其值與原行列式之值異號。即如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

簡單的理由是變換二行（或列）就等於（ν_i，ν_j）多一變換，故爲原行列式之值的改號。

3　行列式之某行或某列的共同因數，可提到行列式外，即如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mu a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \mu\lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mu a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mu a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mu a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mu a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

蓋因一般行列式

$$\Sigma\,\sigma(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)\, a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \cdots (t\, a_{i\nu_i}) \cdots a_{n\nu_n}$$
$$= t\,\Sigma\,\sigma(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)\, a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \cdots a_{i\nu_i} \cdots a_{n\nu_n}$$

。

4
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

即行列式之某行（或列）之各元素爲二數之和時，可寫成如上的二行列式之和

5 當行列式之二行（或列）相等時，則其行列式之値爲 0 。如

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix}$$

由性質 2.易得之 。

6 行列式中有一行（或列）之各元素爲 0 ，則行列式之値爲 0 。

7 行列式之一行（或列）乘某倍數加入他行（或列），其值與原行列式之値相等，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11}+a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21}+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31}+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\times\lambda$

其證明由 3，4，5 易得之。

2－3 餘因式

從行列式之展開式 $\Sigma\,\sigma(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)\, a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \cdots a_{n\nu_n}$ 來觀察，如果我們只注目於原矩陣之第 i 列，則展式中的各項因子中，含第 i 列之元素 $a_{i\nu_i}$ 者，一個一個提出，便可就 a_{i1}，a_{i2}，a_{i3}，$\cdots a_{in}$ 整理成下列和的形式：

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

其中 A_{ij} 就稱爲 a_{ij} 的餘因式，(1)式稱爲行列式的第 i 列展開式，這種說法也可適用於行的情形。如就第 j 行而言，行列式之值可寫成下面形式：

(1) $$|A| = \sum_{\kappa=1}^{n} a_{\kappa j} A_{\kappa j}$$

爲求 A_{ij} ，免去理論的說明，我們可從原方陣

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \underbrace{a_{nj}}_{\text{第 } j \text{ 行}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{（第 } i \text{ 列}$$

中去掉第 j 行與第 i 列，所剩下的 $n-1$ 階行列式冠以符號 $(-1)^{i+j}$ 便是所要求的 A_{ij} 。即元素 a_{ij} 的

餘因式 A_{ij} 爲

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{a_{i2}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 去掉 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

去掉

於是 n 階行列 $|A|$ 可依(1)式化成 $n-1$ 階行列式來展開，又 $n-1$ 階行列式可再化成 $n-2$ 階行列式來展開，依次降階乃可降到易於把握計算的 3 階或 2 階的行列式來展開，這就是餘因式的功用。以上的說明可綜合寫成下面定理來使用。

定理： 2・1（行列式的展開），設 $n\times n$ 方陣 $A=(a_{ij})$ 之元素 a_{ij} 的餘因式爲 A_{ij}（這是一個 $n-1$ 階的行列式冠以 $(-1)^{i+j}$ 者），則有下列關係式。

(1) $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|$（第 i 列展開）

(2) $a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$

(3) $a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} = |A|$（第 i 行展開）

(4) $a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = 0$

(2)〔(4)〕的理由是以原行列式 $|A|$ 的第 j 列〔行〕的元素，取代第 i 列〔行〕的結果，即在原行列式中變成第 i 列〔行〕與第 j 列〔行〕之元素相同，換句話說行列式有二列〔行〕相同，故該行列式之值是 0。

遇到如下面特殊行列式的情形，則

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \times & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots\cdots a_n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 1

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= (2a+2b+2c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} \quad \times(-1) \quad \times(-1)$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & c-a & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c+a & 0 \\ c-a & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^3$$

例2

$$\begin{vmatrix} 1-x & -4 & -2 \\ 2 & 7-x & 4 \\ 4 & 10 & 6+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 2 & 1-x & 4 \\ 4 & -2-2x & -2+x \end{vmatrix} \quad x(-2)$$

$$x(-2)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 2 & 1-x & 4 \\ 0 & 0 & -2+x \end{vmatrix} = (x-1)(x+1)(x-2)$$

兩個行列式的乘積與其兩方陣乘積的行列式相同。也就是下面定理的結果。

定理 2·2 設 A，B 都是 n 階方陣，則 $|AB| = |A||B|$。

若 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，則

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots\cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots\cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j2} & \cdots\cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

【證明】 重複利用 § 2·2 行列式性質 4 於 $|AB|$ 中，

則

$$|AB| = \sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n} b_{j_1 1} b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$

這是因 § 2·2，4)我們可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \sum c_i a_{1j}^{(i)} & a_{1n} \\ \vdots \ \cdots & \vdots & \cdots \ \vdots \\ a_{n1} & \sum\limits_{i} c_i a_{nj}^{(i)} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i} c_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j}^{(i)} & a_{1n} \\ \vdots \ \cdots & \vdots & \cdots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{nj}^{(i)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

式中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 若有相等者，則由 § 2·2，5）在行列式中有兩行相等，其行列式之值爲 0，於是 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 必是由 $1, 2, \cdots, n$ 之某一排列而成，故上式就行列式之行列次序之變換相差只有一個符號 $\sigma(j_1, j_2, \cdots, j_n)$，因之

$$= \sum_{(j_1,\cdots j_n)} \sigma(j_1, j_2, \cdots j_n)\, b_{j_1 1} b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \left(\sum_{(j_1,\cdots j_n)} \sigma(j_1, j_2, \cdots, j_n)\, b_{j_1 1} b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n} \right)$$

$= |A||B|$ （由定義）

2－4 逆矩陣（方陣）

對於方陣A，我們來觀察是否能找到矩陣X，X'使能滿足

(1) $XA=I$，$AX'=I$

式中I表示單位方陣，如果這種X與X'存在的話，則在第一式右邊乘以X'得

$XAX'=IX'=X'$，或$X=XI=XAX'=X'$

換句話說 $X=X'$。

這種情形就像數a能滿足$xa=ax=1$ 的數x，我們稱之為a的**逆數**（倒數）。對於方陣來說，上述滿足(1)式的$X=X'$ 稱為方陣A的**逆矩陣**，且寫作A^{-1}。由於A^{-1}為方陣，故逆矩陣是**逆方陣**。下面若設A^{-1}存在，那麼看我們怎樣去求出A^{-1}，以及何時A^{-1}才能存在。這些事實可看下面定理。

定理 2・3 設$A=(a_{ij})$為n階方陣。

A^{-1}存在的充分必要條件為A的行列式$|A|\neq 0$，此時A^{-1}可求得為

(2)
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

式中A_{ij}為A之第（i，j）元素a_{ij}的餘因式。

【**證明**】 設A^{-1}存在，則因$A^{-1}A=I$，由定理2・2 $|A^{-1}A|=|A^{-1}||A|=|I|=1$。故 $|A|\neq 0$是A^{-1}存在的必要條件。

反之若$|A|\neq 0$，則A的逆矩陣必存在，蓋由定理2・1，

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Sigma A_{j1}a_{j1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma A_{j2}a_{j2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma A_{jn}a_{jn} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| \ddots & \\ 0 & & |A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$=I$

故A^{-1}求得如(2)

一個方陣A的逆方陣A^{-1}存在時，A稱為**正則方陣**。關於正則方陣的主要性質如下；設A，B為n階正則方陣，則

(1) $A^{-1}A=AA^{-1}=I$

(2) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(4) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ $\qquad$ A^t 表示A的轉置方陣。

2－5 聯立一次方程式

欲解關於n個變數$x_1, x_2, \cdots, x_n$之聯立一次方程式

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_n \end{cases}$$

時，我們可令

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

則方程式(1)可表示成

(1) $\quad Ax = b$

故若A^{-1}存在，由上一節定理2・3可求得其解爲：

(2) $\quad x = A^{-1}b$

換句話說，(1)有解的充要條件是$|A| \neq 0$，又由下式

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = |A|$$

知道此表現是依原行列式之第一行展成餘因式來表示的結果，要是將$a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}$改用$b_1, b_2, \cdots, b_n$來代，即

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \geq |A_1|$$

仍表示一行列式，其元素是A中之第一行改代$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$的結果，我們記成方陣$A_1$。以這種方式將第二行，…第$n$行分別以$b_1, b_2, \cdots, b_n$代換的結果寫作

$$b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} = |A_2|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} = |A_n|$$

則解(2)可寫成：

$$(3)\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{pmatrix}，即\ x_j = \frac{|A_j|}{|A|},\ j = 1, 2, \cdots, n$$

這個公式稱爲 **Cramer** 公式。A_j 明白的表出則爲

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & b_1 & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & b_2 & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & b_n & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

第 j 行

在理論上看來，以上解聯立方程式或求 A^{-1}，是很簡單的，但在實際計算各元素的餘因式却是很煩雜的過程，因此實用上都用 Gauss 的消去法或說將矩陣（A；I）施行基本變形，（對列做加減乘除）也有稱掃出法使成（I；B），則 B 必定是 A 的逆矩陣，先看下面實例

例 1　求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{之逆矩陣 } A^{-1}$$

【解】 因 $A = 4 \neq 0$　故 A^{-1} 存在，利用定理 2·3 是可求得

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14 & -12 & 10 \\ 10 & 8 & -6 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

其過程須相當多的手續。我們用掃出法求之如下：

$$(A;I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \times(-1) \quad \times(-3)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \times(-1) \quad \times(-1)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \times(-3) \quad \times(5)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (I;A^{-1})$$

例 2.

$$\text{矩陣}A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}\text{之行列式 } |A|=0$$

故 A 不是正則，A^{-1} 當然也不存在。如用掃出法來檢驗可化

$$(A\ ;\ I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

上式左邊矩陣中第三列爲（0，0，0）則不能化成爲單位方陣之形式，故 A 不是正則。

在求解聯立方程式(1)也可用掃出法，此時是考慮矩陣

$$(A\ ;\ b)=\left(\begin{array}{cccc:c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n\end{array}\right)$$

施行基本變形（對列做加減乘除）化成

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & \cdots & 0 & c_1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_2\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & c_n\end{array}\right)=(I\ ;\ c)$$

則 $x=c$，或 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，…，$x_n=c_n$。我們再舉下面實例來說明

例 3.

$$\text{解}\begin{cases}x+y-2z=6\\ x+3y+4z=0\\ 3x+5y+2z=8\end{cases}$$

【解】 (1) 如例 1 求得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & 2 & -\frac{3}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，故聯立方程式之解爲

$$x=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}b=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & 2 & -\frac{3}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}$$

即 $x=-1$，$y=3$，$z=-2$

(2) 用 $Cramer$ 公式，可先求得 $|A| = 4$，而其解爲

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{4} = -1\,, \qquad y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \frac{12}{4} = 3$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \frac{-8}{4} = 2$$

(3) 用掃出法

$$\begin{array}{l} \times(-1) \\ \times(-3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & 8 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-1) \\ \\ \times(-1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times 5 \\ \\ \times(-3) \end{array} \qquad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

故 $x = -1$，$y = 3$，$z = -2$。

2－6 應用例

注意前節的結果，我們知道 n 元一次聯立方程式之係數所成之行列式 $|A| \neq 0$ 時，其解爲唯一，若其解不是唯一，則此係數行列式 $|A| = 0$。這種結果常常應用於齊次聯立方程式，即 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 的情形。當然此時恒有一組自明解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$。可是在齊次聯立方程式中除了自明解以外，如果尚有非自明解存在，則其係數行列式爲 0。這種性質意味着矩陣理論還是被數學以外之其他部門所廣泛的利用。

今舉數例來說明。

例 1. 求通過二點 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 之直綫方程式。

【解】 設直綫方程式爲 $ax + by + c = 0$，此綫通過 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 兩點，所以

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

如果綫上任意一點爲 (x, y)，當然

$$ax + by + c = 0$$

由此三方程式，視作 a、b、c 之齊次方程式來着想，則所求的直綫要是存在，a、b、c 應該不同時爲 0，此時 a、b、c 即有非自明解，因此 a、b、c 之係數行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

就是所求的直綫方程式。蓋由上面的行列式之第三列展開，是關於 x，y 的一次方程式，且此直綫顯然通過 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 兩點。

例 2. 不在一直綫上的空間三點 (x_i, y_i, z_i)，$i = 1, 2, 3$，可求得一平面通過此三點的方程式爲

解

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

此結果的說明與例 1. 相同

例 3. 平面上三直綫 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3=0$ 相交於一點的充要條件爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

【證明】 設其交點爲（p，q），則

$$a_1p+b_1q+c_1=0$$
$$a_2p+b_2q+c_2=0$$
$$a_3p+b_3q+c_3=0$$

這就是齊次聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0$$

以 $x=p$，$y=q$，$z=1$ 爲其一解的意思，故此齊次聯立方程式有異於自明解的充要條件是係數行列式之值爲 0 。即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

像這樣在解析幾何中之問題，以簡單而優美的姿態用行列式來表現出來。事實上行列式之應用何止限於解析幾何，它還涉及數學的許多分支。

練習問題

1. 試問下列的排列爲偶排列或奇排列

（4，3，2，1），（3，1，2，5，4），（3，1，4，5，2）

2. 試將（1，2，3）之所有排列依奇偶排列分別列出，請問各有幾個？是否其個數相等？

3. 設 A，B 爲 n 階方陣時，試證明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\ |A-B|$$

【注意】 設 A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22} 爲 n 階方陣時，一般

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \neq |A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}|$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \neq |A_{11}|\ |A_{22}| - |A_{12}|\ |A_{21}|$$

請讀者不要誤記。

4. 試求下列各行列式之值

① $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

答：① 660 ② 16 ③ 1

5. 求下列方陣的逆矩陣（方陣），以掃出法與餘因式法求之

① $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

答① $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & -\frac{7}{2} \\ 4 & -2 & -9 \end{pmatrix}$

6. 設 $n = n_1 + n_2$，A_{ij}（i，$j = 1$，2）分別爲 $n_i \times n_j$ 矩陣，且 $A_{21} = 0$，則 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ 爲正則的充要條件爲 A_{11}，A_{22} 是正則。又當 A 爲正則時，其逆矩陣爲

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

試證明之。

【提示】 設 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$，則由 $AA^{-1} = I$ 解出 X_{ij}（i，$j = 1, 2$）

7. 試分別以掃出法及 $Cramer$ 方法解方程式

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

答：$x_1 = \frac{-1}{4}$，$x_2 = x_3 = x_4 = 1/4$

8. 解方程式

① $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 6 & 1+x & 0 \\ 6 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0$ ② $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$

9. 試證明

① $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^2+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^2+cda \\ 1 & c & c^2 & c^2+dab \\ 1 & d & d^2 & d^2+abc \end{vmatrix} = 0$ ② $\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

10. （本題是給已學過微分的讀者參考的題目）

① 設 $f_i(x)$，$g_i(x)$，$h_i(x)$（$i=1,2,3$）爲可微分函數

$$令\ F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}，則$$

$$F'(x)=\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$$

試證明之。

② 設 $f(x)$，$g(x)$在〔a，b〕可微分，且

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

試利用 $Rolle$ 的定理證明

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad，a<\xi<b$$

（但設 $a<x<b$ 時 $g^1(x)\neq 0$）

11. 試證明下面三直綫相交於一點

$$x+ay+a^2-bc=0$$
$$x+by+b^2-ca=0$$
$$x+cy+c^2-ab=0$$

，其中 a、b、c 爲相異常數

【提示】 利用例 3.的結果。

12. 設 λ 爲定數，今設下面相異三直綫

$$(\lambda-1)x+2y=2\lambda-1$$
$$2x+4y=3\lambda$$
$$(3\lambda-2)x-2y=\lambda-2$$

相交於一點，試求 λ 之值。

【提示】 $\lambda=\frac{3}{2}$， 注意 $\lambda=2$ 不適用。

【預告：下一次（第三次）講，矩陣與綫性變換】