關於莫斯科大學口試試題

朱 建 正　　台灣大學數學系

我們看到這些試題，頗饒興味，故系內幾位同仁選了幾題解之。同一題就有幾種巧妙的解法。我覺得很有教育價值，所以記錄下來，供讀者參考。

1. $x\cos x \leq 0.71 \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

解：(1) 由 $\cos x$ 展式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$

當 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 時，$\frac{x^6}{6!} > \frac{x^8}{8!} > \cdots\cdots$，故 $\cos x$ 以 $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ 爲近似值時，其誤差的符號由 $\frac{-x^6}{6!}$ 項的符號決定。即 $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x < \frac{x^6}{6!}$

（上述討論與冪級數的最大項有關，可以參考Polya-Szegö 的Problems and Theorems in Analysis，第26頁至28頁）

故現在只要計算

$f(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的極大值。

$f'(x) = 0$ 爲 $\frac{5}{24}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1 = 0$

故 x^2 有兩正解，由多項式函數圖形之通性，可知極大值在較小的正根處。即 $\frac{18 - 2\sqrt{51}}{5} \sim 0.74$

代入 $f(x)$，因 $\frac{x^4}{24} = \frac{3}{10}x^2 - \frac{1}{5}$

$\therefore \quad f(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{10}x^2 - \frac{1}{5}\right)$

$$= x(-0.2x^2 + 0.8) \sim 0.86(-0.2 \times 0.74 + 0.8) \sim 0.56 < 0.57 < 0.71$$

講評　此解較原問題的估計值0.71好得太多。比較技巧的地方是開始用泰勒多項式做估計的地方。項數必須取得恰好。其次，在代入求多項式之值時，因無計算器之助，故須以眞值，近似值混合的概念來求值，須靈活。

解：(2) 設 $g(x) = x\cos x$，$g'(x) = -x\sin x + \cos x$

解 $f'(x) = 0$ 得 $x = \cot x$，令在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 之解爲 a，

則 $g(a) = \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}$ 爲極大值，

但 $R(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 爲絕對上升函數，

且 因 $g'(1) < 0$，故得 $a < 1$

$$g(a) = k(a) < k(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 0.71$$

解：(3) 在上題得 $x = \cot x$ 之後，不消去三角函數，則得

$$g(a)=\cot a\cos a=\frac{\cos a^{2}}{\sin a}=\frac{1}{\sin a}-\sin a$$

因 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$ 故 $\frac{\pi}{4}<a$

$$\therefore\ \frac{1}{\sin a}<\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\ ,\quad \sin a>\sin\frac{\pi}{4}$$

故 $g(a)<\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<0.71$

講評　解 3 又較解 2 稍簡單。此二解比較接近原出題者的意思。

2. $\sqrt[3]{60}$ ，$2+\sqrt[3]{7}$ 孰大？

解：(1) $\sqrt[3]{60}-2-\sqrt[3]{7}=(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{7})-(\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{60})$

$$=\frac{1}{4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}-\frac{4}{16+8\sqrt[3]{15}+4\sqrt[3]{\frac{225}{4}}}$$

$$=\frac{1}{4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}-\frac{1}{4+2\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{56.25}}>0$$

因　後式分母各項不小於前式分母各項。

故　$\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$

講評　因 $\sqrt[3]{60}\sim 4$ ，$\sqrt[3]{7}\sim 2$ ，故設想此法爲出題者之意思。又由計算器知　$\sqrt[3]{60}-\sqrt[3]{7}-2=0.0019$ ……可知兩數甚接近。

解：(2) 我們用不等式的三一律。

設　$\sqrt[3]{60}-2\leq\sqrt[3]{7}$ ，則三次方後

$$60-8-2.3\sqrt[3]{60}\,(\sqrt[3]{60}-2)\leq 7$$

即　$\frac{15}{2}\leq\sqrt[3]{60}\,(\sqrt[3]{60}-2)\leq\sqrt[3]{60}\,\sqrt[3]{7}$

但　$\left(\frac{15}{2}\right)^{2}>420$　故矛盾，故必有 $\sqrt[3]{60}-2>\sqrt[3]{7}$ 。

講評　此題若直接以 $\sqrt[3]{60}<2+\sqrt[3]{7}$ 乘三次方，則不等號無法遞移。對此我們還沒有找到直觀的解釋。

解：(3) 由二項式定理

$$\sqrt[3]{60}=4\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}=4\left(1-\frac{1}{48}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16^{2}}\cdots\cdots\right)$$

$$2+\sqrt[3]{7}=2+2\left(1-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2+2\left(1-\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8^{2}}-\cdots\cdots\right)$$

顯然　$\sqrt[3]{60}$ 大

解：(4) 本題即在比較　$f(x)=x^{3}-60=0$ ，以及 $g(x)=(x-2)^{3}-7=0$

在接近 4 的那個唯一的實根的大小。

考慮　$f(x)-g(x)=6x^{2}-12x-45=0$

即　$2x^{2}-4x-15=0$　$x=1\pm\frac{\sqrt{34}}{2}$ ，取 x 接近 4 ，故爲 $1+\frac{\sqrt{34}}{2}$ 。

由觀察　$f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形，若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形交於 x 軸上方，

即　$f\left(1+\frac{\sqrt{34}}{2}\right)>0$ ，則 $f(x)$ 之零根就大於 $g(x)$ 之零根。

化簡　$f\left(1+\frac{\sqrt{34}}{2}\right)=\frac{23\sqrt{34}}{4}-\frac{67}{2}$

取$\sqrt{34}>5.83$為近似值，得上式為正，故得證。

講評　本解法是想反映Horner法（或稱賈憲法）而想出來的。

3. 求證$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x \quad 0<x\leq\frac{\pi}{2}$

解：(1) $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\cdots\cdots$

$\therefore \frac{\sin x}{x}>1-\frac{x^2}{3!} \quad 0<x\leq\frac{\pi}{2}$　（見題1解1註）

$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)^3=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216}$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{120}+\cdots\cdots$

故　$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}>\cos x \quad 0<x\leq\frac{\pi}{2}$

$\therefore \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$

解：(2) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$　逐次微分

$\frac{3x\sin^2 x\cos x-3\sin^3 x}{x^4}>-\sin x$

即　$3x\sin x\cos x-3\sin^2 x>-x^4$

即　$3x\sin 2x-3(1-\cos 2x)>-2x^4$

即　$3\sin 2x+6x\cos 2x-6\sin 2x>-8x^3$

$6\cos 2x-12x\sin 2x-6\cos 2x>-24x^2$

即　$\sin 2x<2x$，但此式對$0<x\leq\pi/2$成立，逆推之，得證。

講評　就像許多用L'Hospital規則來計算的不定形，都可改用泰勒多項式來做一樣，解一以泰勒多項式做，較為簡單。是故R. Courant在他那本著名的微積分中，極力反對許多微積分教本過分注重L'Hospital規則的態度。