從錐線的直徑到有心錐線的中心

洪銡雄　嘉義女中

一、前言：

二次錐線有一個有趣的性質：一組平行弦的中點必共線。這些中點所成的集合稱爲這錐線的直徑（在橢圓中直徑爲一線段，在拋物線中直徑爲一射線，在雙曲線中直徑爲一直線或兩射線的聯集）。因此直徑必在一條直線上，爲簡便計，即稱這條直線爲直徑。因此本文所述之直徑係指二次錐線一組平行弦的中央所在的直線而言。

已知平行弦的斜率（或無斜率），利用下列定理所述之方法，我們就能迅速求出直徑的方程式，不但對錐線的所有情形均能迅速求出，且進而能導出求有心錐線之中心的方法。從直徑到中心整個解法過程，一脈相承，迅速簡便，成爲一個優美的系統。

二、本文：

定理1. 二次錐線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 斜率爲 m 之平行弦所決定的直徑爲 $2ax+b(mx+y)+2cmy+d+em=0$。若平行弦無斜率，則直徑爲 $bx+2cy+e=0$

<證明>: 1. 平行弦有斜率 m 時，設其方程式爲 $y=mx+k$ 代入錐線方程式中，得 $ax^2+bx(mx+k)+c(mx+k)^2+dx+e(mx+k)+f=0$ 即

$$(a+bm+cm^2)x^2+(bk+2cmk+d+em)x+(ck^2+ek+f)=0 \quad \text{——(1)}$$

因平行弦與錐線相交兩點，故上(1)式中 $a+bm+cm^2 \neq 0$ 令其兩根爲 x_1，x_2 則

$$x_1+x_2=-\frac{bk+2cmk+d+em}{a+bm+cm^2}$$

又令平行弦之中點爲 (X,Y) 則

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{bk+2cmk+d+em}{2(a+bm+cm^2)}$$

去分母得 $2(a+bm+cm^2)X=-(b+2cm)k-(d+em)$ ——(2)

由 (X,Y) 滿足 $y=mx+k$ 得 $Y=mX+k \therefore k=Y-mX$ 代入(2)式中，得

$$2(a+bm+cm^2)X=-(b+2cm)(Y-mX)-(d+em)$$

整理得 $2aX+b(mX+Y)+2cmY+d+em=0$

換 (X,Y) 爲 (x,y) 得 $\underline{2ax+b(mx+y)+2cmy+d+em=0}$

2. 若平行弦無斜率令之爲 $x=h$，代入錐線方程式中，得

$$ah^2+bhy+cy^2+dh+ey+f=0$$

即 $cy^2+(bh+e)y+(ah^2+dh+f)=0$ 令其兩根爲 y_1，y_2 又令平行弦之中點爲 (X,Y) 則

$$Y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{bh+e}{c}\right)=-\frac{bh+e}{2c}=-\frac{bX+e}{2c}$$

去分母得 $2cY=-bX-e$ 即 $bX+2cY+e=0$ 亦即 $\underline{bx+2cy+e=0}$，證畢

推論：1. 設上述錐線中 $b=0$，若平行弦無斜率則直徑爲水平線 $y=-\frac{e}{2c}$，若平行弦斜率爲0，則直徑爲鉛直線 $x=-\frac{d}{2a}$。

2. 錐線 $a(x-h)^2+c(y-k)^2+d(x-h)+e(y-k)+f=0$ 平行弦斜率爲 m 時，直徑爲 $2a(x-h)+2cm(y-k)+d+em=0$，平行弦無斜率時，直徑爲 $2c(y-k)+f=0$

＜證明＞：1. $b=0$ 時，若平行弦無斜率則直徑爲 $2cy+e=0$，即 $y=-\dfrac{e}{2c}$ 爲水平線，若平行弦斜率爲0，則 $m=0$ ∴直徑爲 $2ax+d=0$ 即 $x=-\dfrac{d}{2a}$ 爲鉛直線。

2. 錐線爲 $a(x-h)^2+c(y-k)^2+d(x-h)+e(y-k)+f=0$ 時，先以 (h,k) 爲新原點作平移，令新坐標爲 (x',y') 則 $x'=x-h$，$y'=y-k$ 代入錐線中，得其新方程式爲 $^{(*)}ax'^2+cy'^2+dx'+ey'+f=0$ 若平行弦斜率爲 m，則平移後斜率仍爲 m，由定理1.知斜率爲 m 的平行弦所決定的直徑爲 $2ax'+2cmy'+d+em=0$，再變換爲原坐標得方程式爲 $2a(x-h)+2cm(y-k)+d+em=0$。若平行弦無斜率，則平移後亦無斜率，利用定理1.，知此時錐線(*)之直徑爲 $2cy'+e=0$，亦即 $2c(y-k)+e=0$，證畢。

註：以上直徑之方程式易於由下法求得：

一、當錐線爲 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 時

1. 當平行弦有斜率 m 時，於 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 中之每一項對 x 微分（視 y 爲 x 的函數）（註1.）得

$$2ax+b\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+2cy\frac{dy}{dx}+d+e\frac{dy}{dx}=0 \text{（參閱定理 2.之證明）}$$

令 $\dfrac{dy}{dx}=m$ 得 $2ax+b(mx+y)+2cmy+d+em=0$，即爲直徑之方程式

2. 當平行弦無斜率時，於 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 中視 x 爲常數，對 y 微分得 $bx+2cy+e=0$ 即爲直徑之方程式。

二、當錐線爲 $a(x-h)^2+c(y-k)^2+d(x-h)+e(y-k)+f=0$ 時，仿上1，2之方法處理。

例1. 求錐線 $x^2+2xy+y^2+4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y+8=0$ 斜率爲2之各弦所決定的直徑

＜解＞ 於錐線方程式中每一項對 x 微分（視 y 爲 x 的函數），得

$$2x+2\left(\frac{xdy}{dx}+y\right)+2y\frac{dy}{dx}+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\frac{dy}{dx}=0$$

約去常數2：$x+\left(\dfrac{dy}{dx}x+y\right)+\dfrac{dy}{dx}y+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\dfrac{dy}{dx}=0$

以 $\dfrac{dy}{dx}=2$ 代入得 $x+(2x+y)+2y+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=0$ 即 $3x+3y-2\sqrt{2}=0$

此即爲所求的直徑。

例2. 求錐線 $13x^2-10xy+13y^2-6x-42y-27=0$ 斜率爲 $\frac{1}{2}$ 的各弦所決定的直徑，又鉛直弦所決定的直徑爲何？

＜解＞ 原式每一項對 x 微分（視 y 爲 x 的函數），得

$$26x-10\left(\frac{dy}{dx}x+y\right)+26y\frac{dy}{dx}-6-42\frac{dy}{dx}=0$$

約去常數2：$13x-5\left(\dfrac{dy}{dx}x+y\right)+13y\dfrac{dy}{dx}-3-21\dfrac{dy}{dx}=0$

令 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$ 代入：$13x-5\left(\dfrac{1}{2}x+y\right)+13y\cdot\dfrac{1}{2}-3-21\cdot\dfrac{1}{2}=0$

化簡得：$7x+y-9=0$ 此即爲所求

又視 x 爲常數對 y 微分得 $-10x+26y-42=0$

約去 -2：$5x-13y+21=0$ 此即爲所求。

例3. 錐線 $9x^2-4y^2-18x+32y-91=0$ 的一個直徑以3爲斜率，求這直徑所平分各弦的斜率

＜解＞　原式每一項對 x 微分（視 y 爲 x 的函數），得

$$18x-8\frac{dy}{dx}y-18+32\frac{dy}{dx}=0$$

令 $\frac{dy}{dx}=m$ 得　$18x-8my-18+32m=0$

故直徑斜率爲 $-\frac{18}{-8m}=\frac{9}{4m}$

現已知直徑斜率爲 3，故　$\frac{9}{4m}=3$　$\therefore m=\frac{3}{4}$

例 4.　錐線 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ 斜率爲 -3 的平行弦所決定的直徑爲何？

＜解＞　原式每一項對 x 微分（視 y 爲 x 的函數），得

$$2\cdot\frac{(x-1)}{4}+2\cdot\frac{(y-2)}{9}\frac{dy}{dx}=0$$

約去常數 2，再乘以 36：$9(x-1)+4(y-2)\frac{dx}{dx}=0$

令 $\frac{dy}{dx}=-3$ 得　$9(x-1)+4(y-2)\cdot(-3)=0$

化簡得：$3x-4y+5=0$ 即爲所求的直徑。

定理 2.　已予有心錐線的一組平行弦，若能作切線（二條）與之平行，則該組平行弦所決定之直徑必過切點（亦即直徑爲兩切點的連線）。且任二平行切線的兩切點的連線均爲直徑。

＜證明＞：1. 設錐線爲 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ ———— (1)

若平行弦有斜率設爲 m 則直徑爲 $2ax+b(mx+y)+2cmy+d+em=0$ ———— (2)

作斜率爲 m 之兩切線令切點爲 $P(x_1,y_1)$ 與 $Q(x_2,y_2)$

(1)式中，視 y 爲 x 的函數，對 x 微分得

$$2ax+b\left(\frac{dy}{dx}x+y\right)+2c\frac{dy}{dx}y+d+e\frac{dy}{dx}=0$$

此中 $\frac{dy}{dx}$ 表錐線在點 (x,y) 之切線的斜率。

以 (x_1,y_1) 代入解得 $\frac{dy}{dx}$ 即得在點 $P(x_1,y_1)$ 之切線的斜率，換 $\frac{dy}{dx}$ 爲 m，則 (x_1,y_1) 滿足 $2ax+b(mx+y)+2cmy+d+em=0$，亦即 (x_1,y_1) 滿足(2)式，故 P 點在直徑上，即直徑通過 P 點。

同理可證：直徑亦通過 Q 點，故直徑通過兩切點。（因兩切點決定一直線，故直徑即爲兩切點的連線）

若平行弦無斜率，則直徑爲 $bx+2cy+e=0$ ———— (3)

作鉛直切線 $x=h$ 代入錐線(1)中得

$ah^2+bhy+cy^2+dh+ey+f=0$

即　$cy^2+(bh+e)y+(ah^2+dh+f)=0$ ———— (4)

因相切故判別式 $\triangle=(bh+e)^2-4c(ah^2+dh+f)=0$，因此(4)式之解爲 $y=-\frac{bh+e}{2c}$ 故切點爲 $\left(h,-\frac{bh+e}{2c}\right)$，以之代入(3)式能滿足，故知切點在直徑上。因鉛直切線可作兩條，故切點有二，此兩切點均在直徑上，因而亦得證。

2. 對任二平行切線均可作一組平行弦與之平行，由 1. 知這些平行弦的中點所成的直徑必過二切線的二切點，因二點決定一直線，故二切點的連線即爲直徑。因此本定理得證。

註：由上之定理可知：直徑必過平行切線的兩切點，因此亦可視與平行弦平行之切線爲平行弦，切點即爲中點。爲了證明底下的定理 3. 我們先證明下面的預備定理。

預備定理：於橢圓中可任意作平行弦。於雙曲線中，與漸近線平行的平行弦不存在，其他的平行弦均存在。

<證明>：以 $Ax^2+Cy^2=1$ ———(1)（$A>0$，$C>0$ 或 $A\cdot C<0$）證之，（此不會失去其一般性）（註 2.）：

以下分成兩種情形來討論：

㈠設以 m 爲斜率之直線爲 $y=mx+k$ ———(2)代入(1)中，得

$(A+Cm^2)x^2+2Cmkx+(Ck^2-1)=0$ ———(3)

若(1)爲橢圓則因 $A>0$，$C>0$ 故 $A+Cm^2\neq 0$，　∴(3)式爲二次方程式，因 $\frac{\triangle}{4}=C^2m^2k^2-(A+Cm^2)(Ck^2-1)=A+Cm^2-ACk^2$，故

$\forall m\in R$ 取 $|k|<\sqrt{\frac{A+Cm^2}{AC}}$ 則 $ACk^2<A+Cm^2$ 即 $\frac{\triangle}{4}>0$，於是(3)式有二相異實根，即

直線(2)在 $|k|<\sqrt{\frac{A+Cm^2}{AC}}$ 之條件下與橢圓(1)有二交點，故知能作任意斜率 m 的平行弦。

若(1)爲雙曲線則漸近線爲 $|A|x^2-|C|y^2=0$ 亦即 $\sqrt{|A|}x\pm\sqrt{|C|}y=0$ 其斜率爲 $\pm\frac{\sqrt{|A|}}{\sqrt{|C|}}=\pm\sqrt{\frac{|A|}{|C|}}=\pm\sqrt{-\frac{A}{C}}$

於(3)中若 $m=\pm\sqrt{-\frac{A}{C}}$ 而 $k\neq 0$ 則 $A+Cm^2=0$ 但 $2Cmk\neq 0$　∴(3)式爲一次方程式，因而僅有一根，故(2)與(1)僅有一交點，故知無斜率爲 $\pm\sqrt{-\frac{A}{C}}$ 之弦，即無與漸近線平行之平行弦存在。

若 $m\in R$，$m\neq\pm\sqrt{-\frac{A}{C}}$ 則 $A+Cm^2\neq 0$，若 $A+Cm^2<0$，取 $|k|<\sqrt{\frac{A+Cm^2}{AC}}$ 則 $\frac{\triangle}{4}>0$，若 $A+Cm^2>0$ 則對每一 $k\in R$ 恆有 $\frac{\triangle}{4}=(A+Cm)^2+(-ACk^2)>0$

（$\because AC<0$）故知對每一 $m\in R$，$m\neq\pm\sqrt{-\frac{A}{C}}$ 時恆有以 m 爲斜率的弦存在，即得證與漸近線平行的平行弦不存在，而其他斜率的平行弦均存在。

㈡顯而易見錐線(1)不論橢圓或雙曲線均有鉛直的平行弦，故本定理獲證。

定理 3.　有心錐線之任一直徑必過中心，且過中心之任一直線爲直徑（但雙曲線之漸近線除外）。

<證明>：今以標準型 $Ax^2+cy^2=1$ ———(1)（A，c 均爲正或 $A\cdot c<0$）證之：（此不失其一般性）

1. 若平行弦有斜率 m 則直徑爲 $2Ax+2cmy=0$ 即 $Ax+cmy=0$，顯然通過中心（0，0）。若平行弦無斜率則直徑爲 $2cy=0$ 即 $y=0$ 亦過中心。

2. 反之，過中心之任一直線若爲水平線或鉛直線則易知必爲一直徑。

現設此直線爲 $y=mx$（$m\neq 0$）的情形證之：

(a)於橢圓中，考慮斜率爲 $-\frac{A}{cm}$ 之平行弦，這些平行弦所決定的直徑爲 $2Ax+2c\left(-\frac{A}{cm}\right)y=0$ 亦即 $y=mx$ 即爲該直線。

(b)於雙曲線中因 $m=\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}\Longleftrightarrow-\frac{A}{cm}=\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}$ 故若 $m\neq\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}$ 則 $-\frac{A}{cm}\neq\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}$

（$\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}$為漸近線之斜率），由預備定理知，斜率為$-\frac{A}{cm}$之平行弦存在（因不與漸近線平行），仿(a)之情形易知這些平行弦所決定的直徑即為直線 $y=mx$（$m\neq\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}$）。若 $m=\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}$則$-\frac{A}{cm}=\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}$，故無斜率為$-\frac{A}{cm}$之平行弦存在，且其他的平行弦所決定的直徑均非 $y=\pm\sqrt{\frac{-A}{c}}x$，故知過中心（0，0）且斜率為$\pm\sqrt{-\frac{A}{c}}$之直線不為直徑。

因有心錐線的直徑必過中心，故取兩條直徑求其交點即為中心，據此，我們得到了底下的定理：

定理 4. 有心錐線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的中心為下列兩條直線的交點：
$2ax+by+d=0$ 與 $bx+2cy+e=0$

＜證明＞：若平行弦無斜率，則由定理 1. 知直徑為 $bx+2cy+e=0$——(1)，若平行弦有斜率為 m，則由定理 1 知直徑為 $2ax+b(mx+y)+2cmy+d+em=0$

令　$m=0$ 則為 $2ax+by+d=0$ ————(2)

(1)(2)為錐線的兩條直徑，故兩者的交點即為中心。

以上錐線方程式中令 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，視 y 為常數，對 x 偏微分求出 $f_x(x,y)$，則 $f_x(x,y)=0$ 就是(2)式，又視 x 為常數，對 y 偏微分，求出 $f_y(x,y)=0$ 就是(1)式，故中心易於由解下列方程組 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ 求出。

例 5. 求有心錐線 $x^2+6xy+y^2-10x-14y+9=0$ 的中心

＜解＞ 視 x 為常數，對 y 微分得 $6x+2y-14=0$ 即 $3x+y=7$ ————(1)

視 y 為常數，對 x 微分得 $2x+6y-10=0$ 即 $x+3y=5$ ————(2)

解(1)(2)得 $x=2$，$y=1$ 故中心為（2，1）

中心就是坐標變換中平移的新原點，因此利用上法易於求出平移的新原點而得平移後之新方程式，再經旋轉即可化錐線成標準式 $Ax^2+cy^2=1$。仍設 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，若錐線 $f(x,y)=0$（$b^2-4ac\neq0$，$b\neq0$）之中心為（h，k）則平移後之方程式為 $ax'^2+bx'y'+cy'^2+f(h,k)=0$（證明略），此中（$h$，$k$）為 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ 的交點，再旋轉設新方程式為 $a'x''^2+c'y''^2+f(h,k)=0$ 則 $\begin{cases} a'+c'=a+c & \text{———(1)} \\ a'-c'=\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2} & \text{———(2)} \end{cases}$

（"$\pm$"符號取與 b 同號）（證明略），由(1)(2)解得 $a'=\dfrac{(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}$

$c'=\dfrac{(a+c)\mp\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}$（前後根號前之"$\pm$"符號同順），故最後之方程式為 $\dfrac{(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}x''^2+\dfrac{(a+c)\mp\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}y''^2+f(h,k)=0$，因此我們又得下之定理：

定理 5. 設有心錐線 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$（$b^2-4ac\neq0$，$b\neq0$ 則經平移至中心（h，k）後，再旋轉一角 θ，θ 滿足 $\cot_2\theta=\frac{a-c}{b}$（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$），可將錐線化簡成下型：

$$\frac{(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}x^2+\frac{(a+c)\mp\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}y^2+f(h,k)=0$$

（其中前後"$\pm$"符號同順，前面"$\pm$"符號取與b同號）

最後我們來看一看"共軛直徑"的性質，先看底下的定理

定理 6. 若有心錐線的一個直徑平分平行於另一直徑的各弦，則這另一直徑也平分平行於前一直徑的各弦。（如此的兩直徑就稱為共軛直徑）

<證明>：設直徑L'與L，L'平分平行於L的各弦（即L'為平行於L的平行弦所決定的直徑）

㈠設L有斜率為m，則由定理 1. 知L'之方程式為

$2ax+b(mx+y)+2cmy+d+em=0$

即 $(2a+bm)x+(b+2cm)y+d+em=0$ ——(1)

若$b+2cm=0$則L'無斜率。由定理 1. 知與L'平行之平行弦所決定之直徑為$bx+2cy+e=0$其斜率為$-\frac{b}{2c}=m$即知此直徑為L，故得證L亦平分平行於L'的各弦。若$b+2cm\neq0$則L'有斜率為$-\frac{2a+bm}{b+2cm}$令之為m'，以m'為斜率之平行弦所決定的直徑為下式：（以$-\frac{2a+bm}{b+2cm}$代入(1)之m即得）

$$\left(2a-\frac{2ab+b^2m}{b+2cm}\right)x+\left(b-\frac{4ac+2bcm}{b+2cm}\right)y+d-\frac{2ae+bem}{b+2cm}=0$$

去分母得 $(4ac-b^2)mx+(b^2-4ac)y+d(b+2cm)-(2ae+bem)=0$

即 $(4ac-b^2)mx+(b^2-4ac)y+(bd-2ae)+m(2cd-be)=0$

同除以$4ac-b^2$：$mx-y+\frac{(bd-2ae)+m(2cd-be)}{4ac-b^2}=0$

此直徑之斜率為m，故即為直徑L。因此亦證明得L平分平行於L'的各弦。

㈡若L無斜率則L'之方程式為$bx+2cy+e=0$ ——(2)，其斜率為$-\frac{b}{2c}$，令之為m'，以m'為斜率之平行弦所決定之直徑為 $(2a+bm')x+(b+2cm')y+d+em'=0$

以$m'=-\frac{b}{2c}$代入上式得$\left(2a-\frac{b^2}{2c}\right)x+d-\frac{be}{2c}=0$

即 $(4ac-b^2)x+(2cd-be)=0$ 此直徑為鉛直線。故即為L，因此亦得證。

由上述之定理知：若L為一直徑則平行於L之平行弦所決定之直徑L'就是L的共軛直徑，因此易於由上定理證明中之(1)(2)兩式得出下列定理：

定理 7. 有心錐線$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$之一直徑L，若L有斜率m，則其共軛直徑為$(2a+bm)x+(b+2cm)y+d+em=0$若L無斜率，則其共軛直徑為$bx+2cy+e=0$（註 2.）

推論： 上述定理中$b=0$時，若一直徑斜率為m且$m\neq0$，則其共軛直徑必有斜率，且兩斜率之積為$-\frac{a}{c}$

<證明>：有心錐線$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$中$b=0$時，若一直徑斜率為m，則其共軛直徑為$2ax+2cmy+d+em=0$（定理 7. ），因有心錐線判別式$b^2-4ac\neq0$故$c\neq0$，且已知$m\neq0$，故$2cm\neq0$因而共軛直徑有斜率為$-\frac{2a}{2cm}=-\frac{a}{cm}$令之為$m'$則$m\cdot m'=m\cdot\left(-\frac{a}{cm}\right)=-\frac{a}{c}$ 得證。

例 6. 求例 5. 之錐線斜率為 $\sqrt{2}$ 之直徑與其共軛直徑

＜解＞ 由例 5. 知中心為（2，1），因直徑必過中心，故由直線的點斜式得所求直徑為

$y-1=\sqrt{2}(x-2)$ 即 $\sqrt{2}x-y+(1-2\sqrt{2})=0$

又於錐線方程式中每一項對 x 微分（視 y 為 x 之函數）

得 $2x+6\left(\dfrac{dy}{dx}x+y\right)+2\dfrac{dy}{dx}y-10-14\dfrac{dy}{dx}=0$

令 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{2}$ 得：$2x+6(\sqrt{2}x+y)+2\sqrt{2}y-10-14\sqrt{2}=0$

約去 2：$x+3(\sqrt{2}x+y)+\sqrt{2}y-5-7\sqrt{2}=0$

整理得：$(1+3\sqrt{2})x+(3+\sqrt{2})y-(5+7\sqrt{2})=0$

此即為共軛直徑的方程式。

例 7. 有心錐線 $3x^2+2y^2-6x+4y-3=0$ 一直徑斜率為 $-\dfrac{2}{3}$，求其共軛直徑的斜率。

＜解＞ 設所求的斜率為 m'，則由定理 7. 之推論知

$\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot m'=-\dfrac{3}{2}$ $\therefore m'=\dfrac{9}{4}$

因有心錐線之直徑必過中心，故當一直徑之斜率已予時（或已知無斜率），則其方程式即為已知，我們將此點列為下列定理：

定理 8. 有心錐線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 斜率為 m 之直徑為

$mx-y+\dfrac{(2ae-bd)-(2cd-be)m}{b^2-4ac}=0$，無斜率之直徑為 $x=\dfrac{2cd-be}{b^2-4ac}$

＜證明＞：由定理 4. 解得中心坐標為 $\left(\dfrac{2cd-be}{b^2-4ac},\dfrac{2ae-bd}{b^2-4ac}\right)$，直徑必過中心，故利用直線的點斜式，得斜率為 m 之直徑為 $y-\dfrac{2ae-bd}{b^2-4ac}=m\left(x-\dfrac{2cd-be}{b^2-4ac}\right)$

即 $mx-y+\dfrac{(2ae-bd)-(2cd-be)m}{b^2-4ac}=0$

而無斜率之直徑為鉛直線，故為 $x=\dfrac{2cd-be}{b^2-4ac}$，於是本定理保證。

同理，若已知直徑通過某一異於中心之已知點時，則亦易於利用兩點式求出方程式，此地不再贅述。—完—

註 1. 此即 y 為 x 之隱函數（Implicit function）

2. 非標準型之有心錐線均可藉平移與旋轉化成型如 $Ax^2+cy^2=1$（$A>0$，$c>0$ 或 $A\cdot c<0$），其中 $A>0$，$c<0$ 時表橢圓（包括圓），$Ac<0$ 時表雙曲線。

※後記：承蒙政大薛昭雄教授於百忙中抽空為拙文斧正，特此誌謝。