輾轉相除法

王 湘 君　師大附中

一、前　言

欲求兩個整數 a ，b 的最大公因數，（今後以記號（ a ，b ）表之）有兩種方法：⑴因式分解法⑵輾轉相除法。而輾轉相除，它眞正的涵意與重要性，乃是說明最大公因數與 a ，b 之間的關係，但因式分解法卻沒有這些作用。但有人認爲用輾轉相除法處理問題，計算繁雜且易生錯誤，這原因是沒有簡化輾轉相除法的形式，本文的目的就是介紹其簡單形式，使用起來很方便，尤其是應用到多項式裡，更簡潔明瞭。

二、輾轉相除法的原理

設 a ，b 是兩個整數，$b \neq 0$ 且 $a = b \cdot q + r$ 其中 $q, r \in Z$ 且 $0 \leq r < |b|$ 則（ a ，b ）=（ b，r ）

〔證明〕設（ a ，b ）$= d$ ，（ b ，r ）$= d'$

(i)欲證 $d \leq d'$

$d \mid a$ 且 $d \mid b \Rightarrow d \mid a - b \cdot q$　即 $d \mid r$

$\because d \mid b$ 且 $d \mid r \Rightarrow d \mid (b, r) = d'$　$\therefore d \leq d'$

(ii)　同理可證　$d' \leq d$

由(i)(ii)可得（ a ，b ）=（ b ，r ）

上述原理告訴我們，兩個整數 a ，b 逐步經由除法可求得其最大公因數，就是最後一個不爲0的餘數。

三、輾轉相除法的涵意

$$a = bq_1 + r_1 \ ,\ 0 < r_1 < |b| \Rightarrow (a, b) = (b, r_1)$$
$$b = r_1 q_2 + r_2 \ ,\ 0 < r_2 < r_1 \Rightarrow (b, r_1) = (r_1, r_2)$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \ ,\ 0 < r_3 < r_2 \Rightarrow (r_1, r_2) = (r_2, r_3)$$
$$r_2 = r_3 q_4 + r_4 \ ,\ 0 < r_4 < r_3 \Rightarrow (r_2, r_3) = (r_3, r_4)$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1} \ ,\ 0 < r_{n+1} < r_n \Rightarrow (r_{n-1}, r_n) = (r_n, r_{n+1})$$
$$r_n = r_{n+1} q_{n+2} + 0 \qquad \Rightarrow (r_n, r_{n+1}) = r_{n+1}$$

故得（ a ，b ）=（ b ，r_1 ）=（ r_1 ，r_2 ）=（ r_2 ，r_3 ）$= \cdots\cdots = r_{n+1}$

這樣得出最大公因數 r_{n+1} ，由倒數第二式，r_{n+1} 可以表爲 r_{n-1} ，r_n 的一次式，再倒回一個可以表爲 r_{n-2} ，r_{n-1} 的一次式，………，最後表爲 a ，b 的一次式。換句話說，a ，b 的最大公因數 d 和 a ，b 之間具有下述關係，即

存在適當的整數 m ，n 使得 $d = ma + nb$

（以上性質，可以推廣到任意 k 個整數的情形）

我們可以用下面的話來說：一組整數的最大公因數，一定可以表示成它們的整綫性組合。

例1.　求滿足 $11x - 1971\ y = 1$ 之一組整數解

〔解〕 設 $a=1971$　$b=11$　$\because (a,b)=1$　$\therefore$ 存在兩整數 x，y 使 $ax+by=1$

a	1971	11	b
$179b$	1969	10	$5(a-179b)$
$a-179b$	2	1	$-5a+896b$

$\therefore 1=-5a+896b$

$\therefore X=896$　$y=5$

〔註〕 如果我們把除法寫成橫式，再由最後一式倒推回去，當然顯得麻煩。這裡介紹的直式，只要在做除法時，兩旁標明數字的涵意，順着做下來就可得到結果。

下面的例 2 是抄自數播第 13 期第121頁的例子，作者潘明山先生引用同餘理論解決這個問題（請讀者參考）這裡仍用輾轉相除法來處理。

例 2. 試求滿足 $422x+255y=1$ 之一組整數解，並求其一般解

〔解〕　$\because (422,255)=1$　$\therefore$ 有解

a	422	255	b
b	255	167	$a-b$
$a-b$	167	88	$-a+2b$
$-a+2b$	88	79	$2a-3b$
$2a-3b$	79	9	$-3a+5b$
$-24a+40b$	72	7	$26a-43b$
$26a-43b$	7	2	$-29a+48b$
$-87a+144b$	6		
$113a-187b$	1		

$\therefore 1=113a-187b$　$\therefore x=113$，$y=-187$

其一般解 $\begin{cases} x=113+255t \\ y=-187-422t \end{cases}$　$t\in Z$

四、輾轉相除法與最高公因式

由於有理係數單元多項式具有類似整數系的除法，我們同樣的可以輾轉相除法，求兩多項式 $f(x)$，$g(x)\in Q[x]$ 的最高公因式，而所依據的原理也是和整數系的情形完全一樣。由輾轉相除法求得最高公因式 $d(x)$ 的眞正涵意是 $d(x)$ 與 $f(x)$，$g(x)$ 之間的關係：存在適當的有理多項式 $m(x)$，$n(x)\in Q[x]$ 使得　$d(x)=f(x)m(x)+g(x)n(x)$

例題：將下列各式的最高公因式表爲原來各式的綫性組合。

(i) $f(x)=x^5-2x^3-2x^2-3x-2$，$g(x)=x^4-2x^3-2x-1$

(ii) $f(x)=x^3+x^2+2x+3$，$g(x)=x^2+x+1$

〔解〕 (i)

f	$1+0-2-2-3-2$	$1-2+0-2-1$	g
xg	$1-2+0-2-1$	$1+0+1+0$	$\frac{xf}{2}-\frac{x^2+2x}{2}g$
$f-xg$	$2-2+0-2-2$	$-2-1-2-1$	$-\frac{xf}{2}\ \frac{x^2+2x+2}{2}g$
$2g$	$2-4+0-4-2$	$-2+0-2+0$	$-f+(x+2)g$
$f-(x+2)g$	$2 \rfloor 2+0+2+0$	$-1+0-1$	$(1-\frac{x}{2})f+\frac{x^2-2}{2}g$
$\times\frac{1}{2}, \frac{f}{2}-\frac{x+2}{2}g$	$1+0+1+0$		
	$1+0+1$		
	0		

$\therefore x^2+1=(\frac{x}{2}-1)f(x)+\frac{-x^2+2}{2}g(x)$

(ii)

f	$1+1+2+3$	$1+1+1$	g
xg	$1+1+1$	$1+3$	$xf-x^2g$
$f-xg$	$1+3$	$-2+1$	$-xf+(1+x^2)g$
		$-2-6$	$-2f+2xg$
		7	$(2-x)f+(x^2-2x+1)g$

$$\therefore 1=\frac{2-x}{7}f(x)+\frac{x^2-2x+1}{7}g(x)$$

五、輾轉相除法的其他應用

輾轉相除法又可把兩個數的比化成連分數，而由連分數可求出這個比的漸近分數。我們知道每一個有理數，都可以用簡單有窮連分數表示，而每一個無理數，都可以用簡單無窮連分數表示。（有關連分數的知識，請讀者參考本刊第七期第33頁，林聰源先生的認識連分數。）現舉兩個例子說明如何利用輾轉相除法求連分數。

例1.：設 $\dfrac{1978}{710}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{A}}}}}$ 求A之值

〔解〕

1978		
1420	2	710
558	1	558
456	3	152
102	1	102
100	2	50
2	25	50
		0

$$\frac{1978}{710}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{25}}}}}$$

$\therefore A=25$

例2. 3.14159265和1可以計算如下：

〔解〕

3.14159265		
3	3	1
0.14159265	7	0.99114855
0.13277175	15	0.00885145
0.00882090	1	0.00882090
		0.00003055

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

漸近分數是 3，$3+\dfrac{1}{7}=\dfrac{22}{7}$，$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=\dfrac{333}{106}$，$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=\dfrac{355}{113}$，……