共點二次曲線系

葉東進　　曉明女中

學過解析幾何的都知道：

平面上，已知有兩直線$\ell_1 : f_1(x, y) = 0$
$\ell_2 : f_2(x, y) = 0$　（x，y的一次式）

相交於P點，如果$\ell : f(x, y) = 0$是過P的任一直綫，那麼有下列的事實：

存在兩個不全為零的實數α與β，使$f(x, y) = \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)$　（註1）

進一步的情形是：

平面上，已知有兩圓$C_1 : g_1(x, y) = 0$
$C_2 : g_2(x, y) = 0$　（形如$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$）

相交於P，Q兩點，如果$C : g(x, y) = 0$是過P與Q的任一圓，那麼有下列的事實：

存在兩個不全為零的實數α與β，使$g(x, y) = \alpha g_1(x, y) + \beta g_2(x, y)$　（註2）

上列的事實，不僅顯示了用已知來表達未知的「以簡御繁」精神，而且在實際問題的處理上更具有極大的方便。因此更深入的去想，便不免提起兩點疑問：

1. 如果兩圓C_1與C_2是相切於一點時，上列的事實也成立嗎？
2. 如果將兩圓分別改換成兩個二次曲線時，會得到什麼樣的結論？

下面的例子，給了第一個問題的否定答案：

兩圓$C_1 : x^2 + y^2 - 2x = 0$
$C_2 : x^2 + y^2 + 2x = 0$相切於點$O(0, 0)$

又圓$C : x^2 + y^2 - 2y = 0$是過O的一圓。

顯然，無法找到兩個實數α，β使

$$x^2 + y^2 - 2y = \alpha(x^2 + y^2 - 2x) + \beta(x^2 + y^2 + 2x)$$

否則將會導致$-2 = 0$（比較兩邊y項的係數）的矛盾。

改用「自由度」的觀點來看第一個問題更為深刻：

如果兩圓$C_1 : g_1(x, y) = 0$
$C_2 : g_2(x, y) = 0$　相切於P點

那麼方程式為$\alpha g_1(x, y) + \beta g_2(x, y) = 0$（$\alpha$，$\beta$不全為零）的圓，其在平面上的自由度是1。但是，過$P$點的圓，在平面上的自由度卻是2。

上面利用「自由度」觀點處理問題的想法，使我們在考慮第二個問題時，應有一些準備，就是我們必須交代清楚，我們所考慮的兩條二次曲線到底有多少個交點？通常，兩條二次曲線的交點有四個。

但是也有交點是三個，兩個或一個的情形；這時候，按「自由度」的觀點來看，如果通過所有交點的一條二次曲線，其自由度超過1的話，那麼這條二次曲線的方程式便不能用原來兩條曲線的方程式的線性組合形式來表示。

一般說來，五點決定一個二次曲線。

因此，假定有兩條相交於四點（這四點中無三點會共線）（註3）的已知二次曲線：

$\Gamma_1 : F_1(x, y) = 0$
$\Gamma_2 : F_2(x, y) = 0$

那麼，通過該四點的其他一條二次曲線，一般來說，其自由度是1。因此，我們關心的乃是：這樣的一條

二次曲線$F(x, y) = 0$是否必定滿足下列的陳述：

存在兩個不全爲零的實數α與β，使$F(x, y) = \alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y)$？

在肯定這個答案之前，我們想通過線性映射與向量的內積等觀點來變化問題的形式：

(i) 一個二次曲線Γ_1：$A_1 x^2 + 2B_1 xy + C_1 y^2 + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0$

Γ_2：$A_2 x^2 + 2B_2 xy + C_2 y^2 + 2D_2 x + 2E_2 y + F_2 = 0$

相交於四點：$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$，$P_4(x_4, y_4)$

這件事實，可以改裝成如下的諸式：

$$(x_i, y_i, 1)\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{pmatrix} \cdot (x_i, y_i, 1) = 0$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad \cdots\cdots$$

$$(x_i, y_i, 1)\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ B_2 & C_2 & E_2 \\ D_2 & E_2 & F_2 \end{pmatrix} \cdot (x_i, y_i, 1) = 0$$

(ii) 如果二次曲線Γ：$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$也通過$P_1$，$P_2$，$P_3$，$P_4$四點，那麼：

$$(x_i, y_i, 1)\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \cdot (x_i, y_i, 1) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \text{ 也成立。}$$

(iii) 存在兩個實數α與β，使$\alpha(A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1)$

$$+ \beta(A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2)$$

$$= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

這個敍述可改寫成：

存在兩個實數α與β，使

$$\alpha\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ B_2 & C_2 & E_2 \\ D_2 & E_2 & F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

(iv) 令$f_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{pmatrix}$，$f_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ B_2 & C_2 & E_2 \\ D_2 & E_2 & F_2 \end{pmatrix}$，$f = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$

那麼原先我們關心的問題便改敍成如下的命題形式：

定理： 設f_1，f_2是R^3的線性映射，且存在四個向量$Xi = (xi, yi, 1)$，$i = 1, 2, 3, 4$滿足：

$$f_1(Xi) \cdot Xi = 0$$

$$f_2(Xi) \cdot Xi = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

若f是R^3的線性映射且滿足$f(Xi) \cdot Xi = 0$，$i = 1, 2, 3, 4$，則存在兩個不全爲零的實數α與β，使$f = \alpha f_1 + \beta f_2$

〔註：由於點(xi, yi)，$i = 1, 2, 3, 4$中的任三點不共線，因此向量$Xi = (xi, yi, 1)$，$i = 1, 2, 3, 4$四者中無三者是線性相關。〕

證明： 以X_1，X_2，X_3爲基底，X_4可表爲X_1，X_2，X_3的線性組合，即存在三個數a，b，c使

$$X_4 = aX_1 + bX_2 + cX_3$$

顯然，此時$abc \neq 0$

由$f(X_4) \cdot X_4 = 0$

$$\Rightarrow f(aX_1 + bX_2 + cX_3) \cdot (aX_1 + bX_2 + cX_3) = 0$$

$$\Rightarrow ab(f(X_1) \cdot X_2 + f(X_2) \cdot X_1) + bc(f(X_2) \cdot X_3 + f(X_3) \cdot X_2) + ca(f(X_3) \cdot X_1 + f(X_1) \cdot X_3) = 0$$

$$[\because f(Xi) \cdot Xi = 0, \ i = 1, 2, 3]$$

同理，由$f_1(X_4) \cdot X_4 = 0$及$f_2(X_4) \cdot X_4 = 0$可導得相似結果而有：

$$ab(f(X_1) \cdot X_2 + f(X_2) \cdot X_1) + bc(f(X_2) \cdot X_3 + f(X_3) \cdot X_2) + ca(f(X_3) \cdot X_1 + f(X_1) \cdot X_3) = 0$$

$$ab(f_1(X_1) \cdot X_2 + f_1(X_2) \cdot X_1) + bc(f_1(X_2) \cdot X_3 + f_1(X_3) \cdot X_2) + ca(f_1(X_3) \cdot X_1 + f_1(X_1) \cdot X_3) = 0$$

$$ab(f_2(X_1) \cdot X_2 + f_2(X_2) \cdot X_1) + bc(f_2(X_2) \cdot X_3 + f_2(X_3) \cdot X_2) + ca(f_2(X_3) \cdot X_1 + f_2(X_1) \cdot X_3) = 0$$

上式關於ab，bc，ca的聯立組，由於ab，bc，$ca \neq 0$而有

$$\begin{vmatrix} f(X_1)\cdot X_2+f(X_2)\cdot X_1 & f(X_2)\cdot X_3+f(X_3)\cdot X_2 & f(X_3)\cdot X_1+f(X_1)\cdot X_3 \\ f_1(X_1)\cdot X_2+f_1(X_2)\cdot X_1 & f_1(X_2)\cdot X_3+f_1(X_3)\cdot X_2 & f_1(X_3)\cdot X_1+f_1(X_1)\cdot X_3 \\ f_2(X_1)\cdot X_2+f_2(X_2)\cdot X_1 & f_2(X_2)\cdot X_3+f_2(X_3)\cdot X_2 & f_2(X_3)\cdot X_1+f_2(X_1)\cdot X_3 \end{vmatrix} = 0$$

因此，存在兩個不全爲零的實數α與β，使

$$\begin{aligned} &(f(X_1) \cdot X_2 + f(X_2) \cdot X_1, \ f(X_2) \cdot X_3 + f(X_3) \cdot X_2, \\ &\quad f(X_3) \cdot X_1 + f(X_1) \cdot X_3) \\ &= \alpha(f_1(X_1) \cdot X_2 + f_1(X_2) \cdot X_1, \ f_1(X_2) \cdot X_3 + f_1(X_3) \cdot X_2, \\ &\quad f_1(X_3) \cdot X_1 + f_1(X_1) \cdot X_3) + \beta(f_2(X_1) \cdot X_2 + f_2(X_2) \cdot X_1, \\ &\quad f_2(X_2) \cdot X_3 + f_2(X_3) \cdot X_2, \ f_2(X_3) \cdot X_1 + f_2(X_1) \cdot X_3) \end{aligned}$$

或是

$$(*)\begin{cases} (\alpha f_1(X_1)+\beta f_2(X_1)-f(X_1))\cdot X_2+(\alpha f_1(X_2)+\beta f_2(X_2))-f(X_2))\cdot X_1=0 \\ (\alpha f_1(X_2)+\beta f_2(X_2)-f(X_2))\cdot X_3+(\alpha f_1(X_3)+\beta f_2(X_3))-f(X_3))\cdot X_2=0 \\ (\alpha f_1(X_3)+\beta f_2(X_3)-f(X_3))\circ X_1+(\alpha f_1(X_1)+\beta f_2(X_1))-f(X_1))\cdot X_3=0 \end{cases}$$

令$F = \alpha f_1 + \beta f_2 - f$，則$F$仍是$R^3$的一個線性映射，且

$(*')$ $F(\lambda Xi) \cdot (\lambda Xi) = 0$，$i = 1, 2, 3$；$\lambda$是一個常數

$(*)$可以改寫成：

$$(*'')\begin{cases} F(X_1) \cdot X_2 + F(X_2) \cdot X_1 = 0 \\ F(X_2) \cdot X_3 + F(X_3) \cdot X_2 = 0 \\ F(X_3) \cdot X_1 + F(X_1) \cdot X_3 = 0 \end{cases}$$

令X是R^3的任一向量：即存在三個實數ℓ，m，n使$X = \ell X_1 + mX_2 + nX_3$，則

$$\begin{aligned} F(X) \cdot X &= F(\ell X_1 + mX_2 + nX_3) \cdot (\ell X_1 + mX_2 + nX_3) \\ &= \ell m(F(X_1) \cdot X_2 + F(X_2) \cdot X_1) + mn(F(X_2) \cdot X_3 + F(X_3) \cdot X_2) \\ &\quad + n\ell(F(X_3) \cdot X_1 + F(X_1) \cdot X_3) = 0 \ [\text{由}(*')\text{及}(*'')] \end{aligned}$$

如此，我們證得了：對於R^3中的任一向量X，恒有$F(X) \cdot X = 0$

因此 $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（註4），即$\alpha f_1 + \beta f_2 = f$

（註1）這個事實的證明如下：

假定 $\ell_1: a_1x+b_1y+c_1=0$

$\ell_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 　　相交於點 $P(h, k)$

$\therefore$ 向量 $N_1=(a_1, b_1)$，$N_2=(a_2, b_2)$ 分別是 ℓ_1 與 ℓ_2 的一個法向量，如果 ℓ 是過 P 的一條直線，其法向量爲 N，那麼 N 可表爲 N_1 與 N_2 的線性組合，即存在兩個不全爲零的實數 α 與 β，使 $N=\alpha N_1+\beta N_2$

$\therefore N=\alpha(a_1, b_1)+\beta(a_2, b_2)=(\alpha a_1+\beta a_2, \alpha b_1+\beta b_2)$

$\therefore \ell$ 的方程式可表爲：$(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+\mu=0$，其中 μ 爲待定之數。

由於 ℓ_1，ℓ_2，ℓ 均過 P 點，而有

$$\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1=0 \\ a_2h+b_2k+c_2=0 \\ (\alpha a_1+\beta a_2)h+(\alpha b_1+\beta b_2)k+\mu=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \mu=\alpha c_1+\beta c_2$

即 ℓ 之方程式爲：$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0$

（註2）這個事實的證明如下：

假定 $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

相交於 P，Q 兩點

則 C_1 與 C_2 的根軸是：$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0 \cdots\cdots(1)$

如果 C 是過 P，Q 的一個圓，$C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

則 C 與 C_2 的根軸是：$(D-D_2)x+(E-E_2)y+(F-F_2)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

因爲 C_1 與 C_2 的根軸就是 C 與 C_2 的根軸，$\therefore$(1)與(2)表同一直線，因而存在一個常數 t，使

$$\frac{D-D_2}{D_1-D_2}=\frac{E-E_2}{E_1-E_2}=\frac{F-F_2}{F_1-F_2}=t$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} D&=tD_1+(1-t)D_2 \\ E&=tE_1+(1-t)E_2 \\ F&=tF_1+(1-t)F_2 \end{aligned}$$

令 $t=\alpha$，$1-t=\beta$ 而有 $\alpha+\beta=1$

因此 C 之方程式爲 $x^2+y^2+(\alpha D_1+\beta D_2)x+(\alpha E_1+\beta E_2)y+(\alpha F_1+\beta F_2)=0$

或是 $\alpha(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\beta(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$

（註3）錐線（拋物線，橢圓，雙曲線）上的任三點是不共線的，因此相交於四點的已知兩個二次曲線，如果其中有一個是錐線的話，那麼相交的四點中無三點是共線自是當然的事。如果兩個二次曲線均是特異的情形（像是一直線或是二平行線或是二相交直線），那麼更無三點共線的可能。

（註4）由 F 的定義知 F 是一個對稱方陣，令

$$F=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

因爲 F 滿足：$F(X)\cdot X=0$，$\forall X\in R^3$

取 $X=(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，$(1,1,0)$，$(1,0,1)$，$(0,1,1)$ 分別代入計算可得：

$a_{11}=0$，$a_{22}=0$，$a_{33}=0$，$a_{12}=0$，$a_{13}=0$，$a_{23}=0$