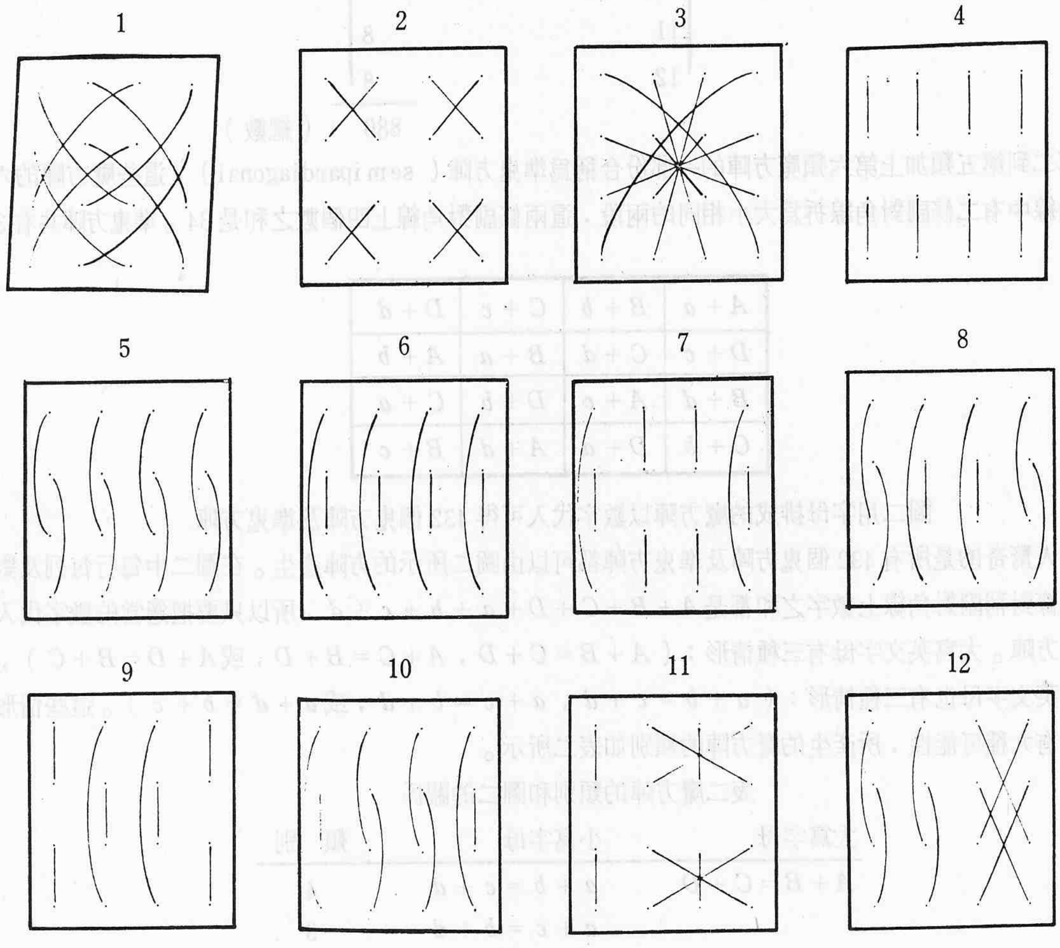
四階魔方陣的全部解法

林 克 瀛　清華大學物理系

三階魔方陣的解法只有一種（由旋轉及置換所得的八個不同的方陣只算成一種解法），是我們祖先遠在二三千年前首先發現的。法國人*Frenicle*是世界上第一位找到四階魔方陣所有的排列法的人，他的結果在1693年發表。四階魔方陣共有880種。

1976年美國紐約市的Dover書局出版了一本由Benson和Jacoby合著的「魔方陣新探」（New recreations With magic squares），共198頁，是平裝本，售價美金四元，不算貴。這是研究魔方陣最好的參考書。書中有一章專門介紹四階魔方陣的分類及排列法，並且在附錄中排出全部880個魔方陣。這本書筆者最近請人由美國帶一本回來，在這篇文章裏先把四階魔方陣的全解介紹給讀者，其他的結果以後再寫。



圖一：四階魔方陣分爲十二類

四階魔方陣可以分爲十二類，如圖一所示。這種分類法是Dudeney首先採用的。圖中每根線的兩端兩個數之和是十七（這樣的一對數字稱爲互補）。方陣中每行每列及兩條對角線上四個數字之和均爲34（此數又稱爲魔術和magic sum）。每一類魔方陣的數目如表一所示。第一類又稱爲泛對角線（pandiagonal）魔方陣，方陣中除了二條主對角線外，還有六條副對角線（broken diagonal）和主對角線平行，每一副對角線有兩段，如果把方陣上下二邊連起來，左右二邊也合併，則副對角線就是和主對角線平行的一條線，第一類（以下簡稱爲鬼diabolic方陣）方陣除了具備魔方陣的性質外，沿副對角線上四個數之和也是34

表一四階魔方陣的類別及每類的個數

名　稱	類　別	個　數	
鬼方陣	1	48	
準鬼方陣	2	48	384
	3	48	
	4	96	
	5	96	
	6	96	
簡單魔方陣	6	208	448
	7	56	
	8	56	
	9	56	
	10	56	
	11	8	
	12	8	
		880	（總數）

。由第二到第五類加上第六類魔方陣的一部份合稱爲準鬼方陣（ semipandiagonal），這些魔方陣的六條副對角線中有二條副對角線拆爲大小相同的兩段，這兩條副對角線上四個數之和是 34 。準鬼方陣共有 384 個。

$A+a$	$B+b$	$C+c$	$D+d$
$D+c$	$C+d$	$B+a$	$A+b$
$B+d$	$A+c$	$D+b$	$C+a$
$C+b$	$D+a$	$A+d$	$B+c$

圖二用字母排成的魔方陣以數字代入可得 432 個鬼方陣及準鬼方陣

令人驚奇的是所有 432 個鬼方陣及準鬼方陣都可以由圖二所示的方陣產生。在圖二中每行每列及對角線和二條對稱副對角線上數字之和都是 $A+B+C+D+a+b+c+d$ ，所以只要把適當的數字代入必爲準鬼方陣。大寫英文字母有三種情形：（ $A+B=C+D$ ，$A+C=B+D$ ，或 $A+D=B+C$ ），同理小寫英文字母也有三種情形：（ $a+b=c+d$ ，$a+c=b+d$ ，或 $a+d=b+c$ ）。這些情形互相配合有九種可能性，所產生的魔方陣的類別如表二所示。

表二魔方陣的類別和圖二的關係

大寫字母	小寫字母	類　別
$A+B=C+D$	$a+b=c+d$	4
	$a+c=b+d$	3
	$a+d=b+c$	5
$A+C=B+D$	$a+b=c+d$	6
	$a+c=b+d$	5
	$a+d=b+c$	2
$A+D=B+C$	$a+b=c+d$	1
	$a+c=b+d$	4
	$a+d=b+c$	6

現在先假定大寫字母代表 0 ，4 ，8 ，12 而小寫字母代表 1 ，2 ，3 ，4 。則所有的可能性如表三所

表三　小寫字母以（ 1 ，2 ，3 ，4 ）及大寫字母以（ 0 ，4 ，8 ，12）分別代入圖二時的各種排法

$a+b=c+d$				$a+c=b+d$				$a+d=b+c$			
a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
1	4	2	3	1	2	4	3	1	2	3	4
1	4	3	2	1	3	4	2	1	3	2	4
2	3	1	4	2	1	3	4	2	1	4	3
2	3	4	1	2	4	3	1	2	4	1	3
3	2	1	4	3	1	2	4	3	1	4	2
3	2	4	1	3	4	2	1	3	4	1	2
4	1	2	3	4	2	1	3	4	2	3	1
4	1	3	2	4	3	1	2	4	3	2	1

$A+B=C+D$				$A+C=B+D$				$A+D=B+C$			
A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
0	12	4	8	0	4	12	8	0	4	8	12
0	12	8	4	0	8	12	4	0	8	4	12

示。這樣配成的魔方陣是完全不同的，共可產生第 1 ，2 ，3 類魔方陣各 16 個，4 ，5 ，6 類魔方陣各32 個。而且由圖二可知必爲準鬼方陣。

接下來以大寫字母代表 0 ，2 ，8 ，10 及小寫字母代表 1 ，2 ，5 ，6 。和上述情形相似的是我們可以算出小寫字母的三種組合（ $a+b=c+d$ ，$a+c=b+d$ 及 $a+d=b+c$ ）各有 8 種情形，而大寫字母則有二種情形如表四所示。同樣的，將大寫字母代以 0 ，2 ，4 ，6 及小寫字母代以 1 ，2 ，9 ，

表四　圖二中大寫字母以（ 0 ，2 ，8 ，10 ）代入的二種排法

$A+B=C+D$				$A+C=B+D$				$A+D=B+C$			
A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
0	10	2	8	0	2	10	8	0	2	8	10
0	10	8	2	0	8	10	2	0	8	2	10

10 則如表五所示。這樣一共可以排出 432 個不同的鬼方陣（ 48 個）及準鬼方陣（ 384 ）。如果你選其他的數字代入圖二，所得的魔方陣會和上述所得的結果重複。

表五　圖二中大寫字母以（ 0 ，2 ，4 ，6 ）代入的二種方法

$A+B=C+D$				$A+C=B+D$				$A+D=B+C$			
A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
0	6	2	4	0	2	6	4	0	2	4	6
0	6	4	2	0	4	6	2	0	4	2	6

由表一可知第六類方陣中有 96 個是準鬼方陣，剩下的 208 個是簡單的魔方陣，可以用下面所說明的方法排出。

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a & b & -b & -a \\ c & d & -d & -c \\ e & f & -f & -e \\ g & h & -h & -g \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cccc} a & -h & h & -a \\ c & -f & f & -c \\ e & -d & d & -e \\ g & -b & b & -g \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cccc} a & h & -h & -a \\ c & d & -d & -c \\ e & f & -f & -e \\ g & b & -b & -g \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cccc} a & -b & b & -a \\ c & -f & f & -c \\ e & -d & d & -e \\ g & -h & h & -g \end{array}}$$

甲　　　乙　　　丙　　　丁

$$\begin{array}{|cccc|}\hline a & b & -b & -a \\ e & d & -d & -e \\ c & f & -f & -c \\ g & h & -h & -g \\ \hline\end{array}$$

戊

$$\begin{array}{|cccc|}\hline a & -h & h & -a \\ e & -f & f & -e \\ c & -d & d & -c \\ g & -b & b & -g \\ \hline\end{array}$$

己

$$\begin{array}{|cccc|}\hline a & h & -h & -a \\ e & d & -d & -e \\ c & f & -f & -c \\ g & b & -b & -g \\ \hline\end{array}$$

庚

$$\begin{array}{|cccc|}\hline a & -b & b & -a \\ e & -f & f & -e \\ c & -d & d & -c \\ g & -h & h & -g \\ \hline\end{array}$$

辛

圖三：第六類魔方陣的排法

假定圖三甲代表某一個第六類魔方陣（以下用$-a$代表與a互補的數）。由定義知

$$a+c+e+g=b+d+f+h$$
$$=a+d+(-f)+(-g)=34$$

由甲圖將中央兩直行互換並顚倒後得到乙圖。將甲乙二圖中第一橫排中央一對互補的數字與同一圖第四排互換可得丙丁二圖。再把甲乙丙丁四圖中第一縱行中央兩數互換，再將同一圖第四行如法泡製，可得戊己庚辛四圖。由圖三可看出來只要甲圖是第六類魔方陣，則其他各圖也必然都是同一類的魔方陣。並且如果

$$b+c+(-e)+(-h)=34$$

則甲乙庚辛四圖爲準鬼方陣而其他四圖爲簡單的魔方陣。若是

$$c+h+(-e)+(-b)=34$$

則情形正好相反。若上面所提到的兩個式子都不成立，則所有八個圖形都代表簡單的魔方陣。

現在如果圖甲是一個準鬼方陣，則由定義知b，c，$-e$，$-h$四數之和是34，因此丙丁戊己四圖必爲簡單的魔方陣，若將所有的96個第六類準鬼方陣一一代入圖甲，由圖丙可得96個彼此不同的簡單魔方陣，若代入丁戊己三圖所得結果與丙圖完全相同。這樣還剩下112個簡單的魔方陣尚未排出。剛才說過，如果一個魔方陣滿足

$$b+c+(-e)+(-h)\neq 34 \qquad c+h+(-e)+(-b)\neq 34$$

$$\begin{array}{|cccc|}\hline A+a & A+b & D+c & D+d \\ C+d & D+b & A+c & B+a \\ D+a & B+c & C+b & A+d \\ B+d & C+c & B+b & C+a \\ \hline\end{array}$$

甲

$$\begin{array}{|cccc|}\hline A+a & A+c & D+b & D+d \\ C+d & D+a & A+d & B+a \\ D+c & B+d & C+a & A+b \\ B+b & C+b & B+c & C+c \\ \hline\end{array}$$

乙

$$\begin{array}{|cccc|}\hline A+b & A+a & D+d & D+c \\ C+d & D+b & A+c & B+a \\ D+a & B+d & C+a & A+d \\ B+c & C+c & B+b & C+b \\ \hline\end{array}$$

丙

圖四：三個輔助方陣（第六類）

則由圖三可產生八個不同的簡單魔方陣。所以我們只要再找出$112/8=14$個新的簡單（第六類）魔方陣就行了。爲了要排出這十四個新方陣，我們需要三個輔助方陣，如圖四所示。先看圖四甲，甲圖必須滿足下列條件

$$A+D=B+C \qquad a+d=b+c$$
$$C=B+k\text{（}k\text{爲任何整數）} \qquad a+b+k=c+d$$

有八種情形可滿足這些條件（表六），並且所排出的魔方陣彼此不同又和以前所排出的不同。再看圖四乙，此圖應滿足

$$A+D=B+C \qquad a+d=b+c$$
$$C=B+k\text{（}k\text{爲任何整數）} \qquad 2a+k=b+d$$

表六：圖四甲的八種排法

A	B	C	D	a	b	c	d	k
0	4	8	12	1	2	3	4	+4
0	4	8	12	2	1	4	3	+4
0	8	4	12	3	4	1	2	−4
0	8	4	12	4	3	2	1	−4
0	2	4	6	1	9	2	10	+2
0	2	4	6	9	1	10	2	+2
0	4	2	6	2	10	1	9	−2
0	4	2	6	10	2	9	1	−2

有三種情形可滿足這些條件（見表七），而且所排出的魔方陣與以前不相同。圖四丙應滿足

$$A+D=B+C \qquad a+d=b+c$$
$$C=B+k\ (k\ 為任何整數) \qquad 2b+k=e+d$$

表七：圖四乙的三種排法

A	B	C	D	a	b	c	d	k
0	4	8	12	1	2	3	4	+4
0	8	2	10	6	5	2	1	−6
2	0	6	4	2	1	10	9	+6

有三種情形（見表八）可滿足這些條件，並排出新的方陣。

表八：圖四丙的三種排法

A	B	C	D	a	b	c	d	k
0	8	4	12	2	4	1	3	−4
0	2	8	10	5	1	6	2	+6
2	6	0	4	1	9	2	10	−6

接下來是第七類魔方陣，可利用圖五的二個輔助方陣來排。甲圖若能滿足

$$A+D=B+C \qquad a+c=b+d \qquad 2A=B+D$$

$A+a$	$B+b$	$C+c$	$D+d$
$C+b$	$C+d$	$B+a$	$B+c$
$B+d$	$D+b$	$A+c$	$C+a$
$D+c$	$A+d$	$D+a$	$A+b$

甲

$A+a$	$B+b$	$C+a$	$D+b$
$B+c$	$D+a$	$A+b$	$C+d$
$D+d$	$C+c$	$B+d$	$A+c$
$C+b$	$A+d$	$D+c$	$B+a$

乙

圖五：二個輔助方陣（第七類）

則必為一簡單的第七類魔方陣，有24種情形可滿足這些條件並排出不同的方陣，如表九所示。圖乙應滿足

$$A+C=B+D \qquad a+b=c+d$$

$C = B + k$（k 爲任意整數）　　　$2b + k = a + d$

表九：圖五甲的 24 種排法

A	B	C	D	(a, b, c, d) 有八種組合 滿足 $a + c = b + d$
2	1	4	3	(0，4，8，12)
2	0	6	4	(1，2，9，10)
4	0	12	8	(1，2，3，4)

有 4 種情形可滿足這些條件（表十）並排出新的方陣。

表十：圖五乙的 4 種排法

A	B	C	D	a	b	c	d	k
0	8	12	4	4	1	3	2	+4
12	4	0	8	1	4	2	3	−4
1	2	6	5	8	2	10	0	+4
6	5	1	2	2	8	0	10	−4

由甲乙二圖可排出 28 個不同的第七類魔方陣，再利用下述的轉換可再得 28 個新的第七類方陣，方法如下：若圖六甲爲一個第七類方陣，則圖六乙是另一第七類方陣。這樣可得 56 個不同的方陣。將圖甲第一行中央一對互補的數字和第四行互換即得圖乙。

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ e & -b & -c & f \\ -e & g & h & -f \\ -a & -g & -h & -d \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ f & -b & -c & e \\ -f & g & h & -e \\ -a & -g & -h & -d \end{array}$$

甲　　　　　　　　　　乙

圖六：若甲圖是第七類方陣則乙圖亦然

由第七類方陣經下列手續可得第八九及十類方陣。把一個第七類方陣的行和列同時依 3－1－4－2 次序重新排列可得一第八類方陣，即把第三行及列移爲第一行及列，再把第一行及列改爲第二行及列，依此類推，如圖七所示。若次序改爲 2－1－4－3 則得第九類方陣，若次序爲 1－3－2－4 則爲第十類方陣。於是利用 56 個第七類方陣可得第八九十類方陣各 56 個。

七　　　　八　　　　九　　　　十

$$\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 16 & 11 \\ 8 & 12 & 1 & 13 \\ 9 & 7 & 14 & 4 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 14 & 9 & 4 & 7 \\ 16 & 2 & 11 & 5 \\ 3 & 15 & 6 & 10 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 12 & 8 & 13 & 1 \\ 5 & 2 & 11 & 16 \\ 10 & 15 & 6 & 3 \\ 7 & 9 & 4 & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 2 & 16 & 5 & 11 \\ 9 & 14 & 7 & 4 \\ 8 & 1 & 12 & 13 \\ 15 & 3 & 10 & 6 \end{array}$$

圖七：第七類方陣重新排列後可得第八九十類方陣

最後剩下第十一及十二類方陣各八個。圖八甲及乙分別代表第十一及十二類魔方陣，其條件爲

$A + D = B + C$　　　$a + d = b + c$

$C = B + k$（k 爲任何整數）　　$a + b + k = c + d$

$A+d$	$B+a$	$D+d$	$C+a$
$D+a$	$B+d$	$A+a$	$C+d$
$A+c$	$C+b$	$D+c$	$B+b$
$D+b$	$C+c$	$A+b$	$B+c$

甲

$A+d$	$D+d$	$B+a$	$C+a$
$A+c$	$D+c$	$C+b$	$B+b$
$D+a$	$A+a$	$B+d$	$C+d$
$D+b$	$A+b$	$C+c$	$B+c$

乙

圖八：第十一（甲）及十二（乙）類魔方陣

有八種情形如表十一所示。若將第十一類方陣之行列依照1－3－2－4次序重排就變成第十二類方陣。

表十一：第十一及十二類魔方陣的排法

A	B	C	D	a	b	c	d	k
0	4	8	12	1	2	3	4	＋4
0	4	8	12	2	1	4	3	＋4
0	8	4	12	3	4	1	2	－4
0	8	4	12	4	3	2	1	－4
0	2	4	6	1	9	2	10	＋2
0	2	4	6	9	1	10	2	＋2
0	4	2	6	2	10	1	9	－2
0	4	2	6	10	2	9	1	－2