談題組命題在聯考，段考，複習考的意義與價值性

羅添壽　省立新化高中

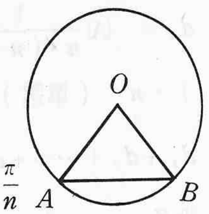
近年來由於大學聯考，大部分之試題以題組之形式出現，造成許多學校的段考，複習考，高三模擬考皆以題組的形態命題，然題組命題得當與否，實值得我們教育界人士去關心，以下是筆者對題組命題之看法，並分類整編供各位先進，同學參考，共同研究其價值，同時試題可供學生演練。

1. 題組命題的優點：
 ① 促進教師的進修，使數學教育邁向新的旅程。
 ② 培養學生思考，組織與分析試題的能力，尤其題組很適合於段考，複習考（因有範圍的考試較易促進學生對試題的組織與分析）
 ③ 題組較易綜合高中三年所習之教材，易測出學生之程度，減少投機取巧者。
2. 題組命題的缺點：
 ① 題組之命題一定是經過教師精心的設計與創作，然若不顧及學生的程度，雖然試題本身非常精采，然題組分數所佔之分量重，往往失去其命題的意義與價值，不可不愼也。（因未顧及學生之程度而命題的題組可說非常容易命題，然學生失分亦容易，因此往往分數普遍降低）
 ② 題組若本身很繁雜易造成學生心理的負擔，影響思考，分析試題的情緒，（請見後面試題之分析）
 ③ 教師命題往往以自己的程度衡量學生的程度，造成數學成績普遍低落，間接影響學生學習的興趣。

今筆者將題組之優缺點分爲五大類，由讀者自行分析其價值性，做爲今後命題之參考，但願它帶來了啓示性的功效。

（註）：此份資料除筆者自行命題外，並且配合目前各學校之模擬試題整編之。

(A) 較易測出學生程度之試題：（連鎖題）



<中>右圖爲一半徑爲1的圓，O 爲其圓心，AB 爲此圓內接正 n 邊形的一邊，

1. $\triangle AOB$ 的面積爲 (A) $sin\frac{2\pi}{n}$ (B) $cos\frac{2\pi}{n}$ (C) $cos\frac{2\pi}{n}\ sin\frac{2\pi}{n}$ (D) $cos\frac{\pi}{n}\ sin\frac{\pi}{n}$ (E) $sin\frac{\pi}{n}$ （單選）

2. 試利用上題的結果，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ sin\frac{\pi}{n}$ 之值 (A) 1 (B) 0 (C)不存在 (D) π (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ （單選）

（分析）：①此題(1) 爲求面積之基本試題

(2) 當 $n\to\infty$ 時圓內接正 n 邊形之面積等於圓之面積，學生們亦可利用 $\lim\limits_{\to\infty}\frac{sin}{\theta}=1$ 之性質解之。

②該題組中第①題得分較易，但第②題對一般學生而言思考不易，故不易得分。

<央>設 $f(x)=2x^3+4x^2-8x+3$，$x\in R$，之圖形在點（0，3）之切線方程式爲 $y=mx+k$，反曲點坐標爲 $p(a,b)$ 則

3. $m+k=$ (A) 3 (B) -8 (C) 5 (D) 0 (E) -5 （單選）

4. $7a+9b=$ (A) 18 (B) -81 (C) 81 (D) -18 (E) $\frac{257}{27}$ （單選）

5. 方程式 $f(x)=0$ 有 (A)一負根二虛根 (B)三負根，一正根 (C)一負根，二正根 (D)一正根，二虛根 (E)三實根 （單選）

（分析）：此題可說爲一試題而已，只要多項函數求極值融會貫通，即能解出且其命題之優點可測出程度，因有些學生若反曲點不會，但切綫方程式會亦可得分，

<研>定義：若經由平移，旋轉後，曲綫 r_1 可以重疊在另一曲綫 r_2 上，則稱 r_1 與 r_2 全等，考慮下列諸曲綫：

Γ_1 ： $r_1=\dfrac{9}{5-4\cos\theta}$ ， Γ_2 ： $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Γ_3 ： $|z|+|z-8|=10$ ， $z\in C$ ， Γ_4 ： $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}|2x+2y+5|$

Γ_5 ： $\begin{cases} x=h+5\cos\theta \\ y=k+3\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

Γ_6 ： $[x\quad y]\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=[\cos\theta\quad\sin\theta]\begin{bmatrix}5 & 10\\ -6 & 3\end{bmatrix}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

6. Γ_2 的圖形與 (A) Γ_1 (B) Γ_3 (C) Γ_4 (D) Γ_5 (E) Γ_6 全等 （多選）

7. Γ_4 的離心率 $e=$ (A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{4}$ (E) $\frac{1}{2}$ （單選）

8. Γ_6 的外切矩形（切點在頂點）面積爲 (A) 15 (B) 30 (C) 45 (D) 60 (E) $\frac{450}{17}$ （單選）

（分析）：此題純測驗橢圓的基本性質，綜合教材各單元，而命題是測驗學生程度不可多得之試題，尤其有關橢圓之基本概念全概括在其中。

<究>數軸上之數列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\cdots\frac{1}{n}\cdots\cdots$ 所對應之點 p_1 ， p_2 ，…… p_n ……設 p_n 與 p_{n+1} 之距離爲 d_n ， $(n\in N)$

9. $d_n=$ (A) $\frac{1}{n\cdot(n-1)}$ (B) $\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ (C) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (D) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (E) $(n-1)\cdot n$ （單選）

10. $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n+\cdots\cdots=$ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) 1 (E) 2 （單選）

11. 設 $Z_n=\cos d_n\pi+i\sin d_n\pi$ ，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdots\cdots\cdot z_n)=$ (A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-i$ (E) $\frac{1}{2}$ （單選）

（分析）：由簡入繁，從基本概念考起，這是命題上成功的試題，沒有複數極式概念的同學至少可得第 9.，10.兩題之分數，

<院> $a,b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ，（ a ， b 是那一元素之機會均等）。

極座標方程式 $r(a^2+b\cos\theta)=5$ 圖形爲 S

12. 則 S 爲橢圓之機率＝ (A) 0.45 (B) 0.72 (C) 0.81 (D) 0.90 (E) 0.92 （單選）

13. 如隨機變數 X （ S 爲拋物綫）＝500， X （ S 爲雙曲綫）＝300， X （ S 爲橢圓）＝100， X （ S 不爲錐綫）＝50，則 X 之期望值爲 (A) 36 (B) 48 (C) 72 (D) 144 (E) 256 （單選）

（分析）：一般學生看到稍爲變化之試題，總不知如何尋求思考路綫，上例可說非常基本之試題，但能解出的學生可說不多。

＜數＞設 $\dfrac{(x^2-25)(x-8)^3}{(x^3+1)} \leqq 0$ 之解集合爲 S，且其元素皆爲整數即 $x \in Z$，今從 S 中任取一元素，若爲 $x=3n$，$n \in Z$，則得 1 分，若元素 x 爲 $3n+1$，$n \in Z$ 則得 3 分，若 $x=3n+2$，$n \in Z$ 則得 4 分，今從 S 中任選一元素的期望值爲 u，則

14. S 中元素之個數共有 (A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10 （單選）

15. u 滿足 (A) $1 \leqq u < 2$ (B) $2 < u \leqq 3$ (C) $3 < u \leqq 4$ (D) $4 < u \leqq 5$ (E) $5 < u \leqq 6$ （單選）

＜分析＞：此題在測驗高次不等式之求解，配合如何求期望值，綜合命題，該試題能測出學生眞正的程度，一般程度的學生該易於得分才對。

＜學＞設兩正數 x，y 滿足 $2x+y \leqq 4$ 及 $3x+4y \leqq 12$，令 $x+y$，xy 之最大值分別爲 M，M' 且發生 M 之點設爲 (x_1, y_1)，發生 M' 之點設爲 (x_2, y_2)，則

16. (A) $x_1=2$ (B) $x_1+y_1=4$ (C) y_1 爲有理數 (D) $4<M<5$ (E) $x_1+y_1=\dfrac{16}{5}$ （多選）

17. (A) $x_2 > y_2$ (B) x_2 爲無理數 (C) $M'=2$ (D) $M'>2$ (E) $x_2+M'=5$

＜分析＞此題在測驗學生對線性規劃之認識。然由於課本對綫性規劃沒詳細述說，又課堂上的教師趕課程進度，造成學生對綫性規劃認識不多，故希望教科書之編著能增編之以利學習。

＜傳＞若 $x+y+k=0$ 爲圓錐曲綫 $x^2+4xy+y^2=6$ 的切綫，e 爲此錐綫之離心率，則

18. (A) $|k| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $|k| \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ (C) $|k| \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ (D) $|k| \in \{6, 7, 8, 9, 0\}$ (E) k 有兩相異值 （多選）

19. (A) $e \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $e \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$ (C) $e \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ (D) $e \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$ (E) $e \in \{2, 4, 6, 8\}$ （多選）

＜分析＞此題爲綜合圓錐曲綫與坐標變換之關係命題，倘坐標變換不會，而直綫與曲綫之關係了解亦能得部份分數，此種題組能測出學生眞正的程度。

＜B＞ 避免學生猜答之題組 （必須每小題皆答對始可得分）

＜播＞由 1，2，2，2，3，4，4，5 八個數字可做成四位數共 $100r+10s+t$ 個（其中 r，s，$t \in \{0, 1, 2 \cdots\cdots 9\}$）

20. (A) $r \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (B) $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ (C) $r \in \{3, 4, 5, 6\}$ (D) $r \in \{5, 6, 7, 8\}$ (E) $r \in \{7, 8, 9, 0\}$ （多選）

21. (A) $s \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (B) $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ (C) $s \in \{3, 4, 5, 6\}$ (D) $s \in \{5, 6, 7, 8\}$ (E) $s \in \{7, 8, 9, 0\}$ （多選）

22. (A) $t \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (B) $t \in \{1, 2, 3, 4\}$ (C) $t \in \{3, 4, 5, 6\}$ (D) $t \in \{5, 6, 7, 8\}$ (E) $t \in \{7, 8, 9, 0\}$ （多選）

＜分析＞：此題在測驗學生對“不盡相異物之排列”之了解程度，一般學生只要在學校裡好好研習，這種試題該是很容易得分，尤其它思考單純，不必綜合其他單元。

＜季＞設 $Z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} Z^{k-1}$，$S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，若 $|S-S_n|<10^{-5}$，則正整數 n 最小值爲 $10p+q$ 其中 $p, q \in \{0, 1, 2, \cdots\cdots 9\}$

23. (A) $p \in \{1, 3, 5, 7\}$ (B) $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ (C) $p \in \{2, 4, 6, 8\}$ (D) $p \in \{1, 4, 7, 8\}$ (E) $p \in \{0\}$ （多選）

24. (A) $q \in \{1, 3, 5, 7\}$ (B) $q \in \{1, 2, 3, 4\}$ (C) $q \in \{2, 4, 6, 8\}$ (D) $q \in \{1, 4, 7, 8\}$

(E) $q\in\{0\}$　（多選）

＜分析＞：複數，級數，對數基本概念綜合命題，是測驗學生平時是否有好好演練數學最好之試題，然此種試題大部份學生皆想到準備利用棣莫夫定理，因此得分不易。

＜刊＞設 $f(x)=a(x^2+2x+4)^2+3a(x^2+2x+4)+b$ 之最小值爲 37 且 $f(-2)=57$ 則

25. (A) $a\in\{1,2,3,4\}$　(B) $a\in\{2,3,4,5\}$　(C) $a\in\{1,2,3,4\}$　(D) $a\in\{4,5,6,7\}$
(E) $a\in\{3,4,5,6\}$　（多選）

26. (A) $b\in\{1,2,3,4\}$　(B) $b\in\{2,3,4,5\}$　(C) $b\in\{1,2,3,4\}$　(D) $b\in\{4,5,6,7\}$
(E) $b\in\{3,4,5,6\}$　（多選）

27. (A) $f(1)\in[0,50]$　(B) $f(1)\in[51,100]$　(C) $f(1)\in[101,150]$　(D) $f(1)\in[150,200]$
(E) $f(1)\in[200,\infty]$

＜分析＞：此題在測驗學生對二次函數求極值之認識及其應用，並且綜合淺易的函數概念命題，若非對它有深刻的了解，無法將此題解出。當然此題命題之優點在注重分析題意。

＜演＞若 $x^2+px+q=0$ 之根爲另一根之平方，則 p 與 q 之間必有一關係式。其形式如下：

$p^3-(\ell p-1)q^m+q^n=0$ 試求 ℓ,m,n

28. (A) $\ell\in\{1,3,5,7,9\}$　(B) $\ell\in\{2,3,6,7\}$　(C) $\ell\in\{4,5,6,7\}$　(D) $\ell\in\{8,9\}$　(E) $\ell\in\{0\}$　（多選）

29. (A) $m\in\{1,3,5,7,9\}$　(B) $m\in\{2,3,6,7\}$　(C) $m\in\{4,5,6,7\}$　(D) $m\in\{8,9\}$　(E) $m\in\{0\}$　（多選）

30. (A) $n\in\{1,3,5,7,9\}$　(B) $n\in\{2,3,6,7\}$　(C) $n\in\{4,5,6,7\}$　(D) $n\in\{8,9\}$　(E) $n\in\{0\}$　（多選）

＜分析＞：此題爲二次方程式中根與係數間關係之應用，其命題之目的在測驗學生如何

將 $\begin{cases}\alpha+\alpha^2=-p\cdots\cdots ① \\ \alpha^3=q\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ p^3-(\ell p-1)q^m+q^n=0\cdots\cdots ③\end{cases}$ 中①^3 與②聯立消去參數 α 然後由③式中，求 ℓ,m,n

當然①^3 思考不易，故不易得分。

＜練＞$f(x)=\ell og_{\frac{1}{2}}(sin^4\theta+cos^4\theta)$ 之最大值爲 M，最小值爲 m，則

31. (A) $M\in\{1,3,5,7\}$　(B) $M\in\{3,4,6,7\}$　(C) $M\in\{-1,-4,0,3\}$　(D) $M\in\{5,7,-1,-4\}$　(E) $M\in\{0,8\}$　（多選）

32. (A) $m\in\{1,3,5,7\}$　(B) $m\in\{3,4,6,7\}$　(C) $m\in\{-1,-4,0,3\}$　(D) $m\in\{5,7,-1,-4\}$　(E) $m\in\{0,8\}$　（多選）

＜分析＞：此題在測驗學生對三角函數值域與對數值域基本概念的認識，一般學生均可得分，何況它沒有複雜的計算過程呢？

＜題＞有一二次函數 $y=f(x)=ax^2-2x+c$ 若曲綫上之點的縱坐標有極小值 -2，且其與直綫 $y=2x$ 之二交點之橫坐標差爲 2，則

33. (A) $|a|\in\{1,2,3,4,5\}$　(B) $|a|\in\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right\}$　(C) $|a|\in\{3,5,7,9\}$　(D) $|a|\in\{1,4,6,8\}$　(E) $|a|\in\left\{\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right\}$　（多選）

34. (A) $|c|\in\{1,2,3,4,5\}$　(B) $|c|\in\left|\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right|$　(C) $|c|\in\{3,5,7,9\}$　(D) $|c|\in\{2,4,6,8\}$　(E) $|c|\in\left\{\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right\}$　（多選）

<分析>：①此題爲二次函數求極值配合根與係數間之關係綜合命題，該是易測出學生程度之試題。

②此題還要注意條件，極小值 -2 之意義即 $a>0$，否則誤解而失分，太可惜了。

<C> 不易測出學生程度的題組：（未必有連鎖關係）

<部>先觀察自然數平方之個位數字，再計算 $1!+2!+3!+4!$ 及………

令 $y^2=1!+2!+3!+\cdots\cdots+x!$，$z=1!+2!+3!+\cdots\cdots+x!$

$u^{2n}=1!+2!+3!+\cdots\cdots+x!$

35. 不論 x 爲那一自然數，則 z 之個位數字不可能爲 (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 6 (E) 9 （多選）

36. 若 x，$y\in N$，則序對（x，y）共有幾解？ (A)無解 (B) 1 解 (C) 2 解 (D) 3 解 (E)多於 3 解 （單選）

37. 若 x，u，$n\in N$ 且 $n\leqq 20$ 則元素組（x，y，z）共有幾解？ (A)不多於 15 解 (B)多於 15 解 (C)多於 25 解 (E)多於 30 解 （多選）

<分析>：此題較爲抽象，不易測出學生之程度，同時在限定之時間內，不易解出，但願聯考不會有此種試題出現。

<分>$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，K 爲 $\triangle ABC$ 之外心，H 爲 $\triangle ABC$ 之垂心，P 爲 $\triangle ABC$ 內部之動點，P 至 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 之距離分別爲 x，y，z，$\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

38. 下列何者爲眞？ (A) $3\leqq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<6$ (B) $4\leqq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<7$ (C) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ (D) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}$ (E) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ （多選）

39. 關於 m，n 之值下列何者爲眞？ (A) $m>n$ (B) $m\leqq n$ (C) $m=\dfrac{5}{24}$ (D) $m+n=1$ (E) $n=\dfrac{19}{4}$ （多選）

40. 若 $7x+6y+5z=2k$ 則 (A) $12\leqq k<13$ (B) $13\leqq k<14$ (C) $14\leqq k<15$ (D) $15\leqq k<16$ (E)以上皆非 （單選）

41. 若 $x^2+y^2+z^2$ 之最小值爲 ℓ，則 (A) $\ell\in Z$ (B) $\ell\in Q$ (C) $\ell\leqq 5$ (D) $\ell>5$ (E) $\ell>10$ （多選）

<分析>這是一非常漂亮的題組，綜合教材各單元，然美中不足的是或許有大部分的學生對解第 40題還是只想到利用向量解，同時第 38 題所問太多，不易得分。

<D> 過於冗長的題組

<師>設 x，$y\in R$，對函數 $f(x,y)=5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4$ 而言，

42. 當 $x=a$，$y=b$ 時此函數 $f(x,y)$ 有最小值 m，則 (A) $5a-3b=2$ (B) $3a+5b=8$ (C) $a+b=2$ (D) $m=8$ (E) $m=-8$ （多選）

43. 欲使方程式 $f(x,y)=0$ 的新方程式無 x 項，無 y 項，必將坐標軸平移至新原點（h，k）則 $h+k=$ (A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 2 (E) 3 （單選）

44. 方程式 $f(x,y)=0$ 的圖形對下列何者成對稱？

(A)點（0，0） (B)點（1，1） (C)點（2，2） (D)直線 $x=y$ (E)直綫 $x+y=2$ （多選）

45. 方程式 $f(x,y)=0$ 所表圖形的離心率 $e=$ (A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{1}{4}$ (E) $\dfrac{1}{3}$ （單選）

46. 設 x，$y\in R$ 滿足 $f(x,y)=0$ 則 $x+y$ 的最大值 M 及最小值 m 爲 (A) $M>3$ (B) $M>4$ (C) $M+m=4$ (D) $m<0$ (E) $m<-1$ （多選）

47. 若令 $x+y=k$ 且 $f(x,y)=0$ 則 xy 可表爲 k 的函數而 $xy=$ (A) $5k^2-4k-4$ (B) $5k^2+4k-4$ (C) $5k^2+4k+4$ (D) $5k^2-4k+4$ (E) $1/16\,(5k^2-4k-4)$ （單選）

48. 若 x，$y\in R$ 滿足 $f(x,y)=0$ 則 xy (A)有最大值 (B)有最小值 (C)無最大值 (D)沒有最小值 (E)有最大值且有最小值 （多選）

49. 若x，$y \in R$滿足$f(x,y)=0$，則$x^2+y^2-2x-2y+2$的最大值M及最小值m爲 (A)$M\in\{1,3,5,7\}$ (B)$M\in\{2,4,6,8\}$ (C)$M\in\{1,4,7\}$ (D)$M\in\{2,3,7,9\}$ (E)$M\in\{1,4,6,9\}$ （多選）

50. 承上題 (A)$m\in\{1,3,5,7\}$ (B)$m\in\{2,4,6,8\}$ (C)$m\in\{1,4,7\}$ (D)$m\in\{2,3,7,9\}$ (E)$m\in\{1,4,6,9\}$ （多選）

51. 方程式$f(x,y)=0$之圖形在x軸之投影長爲ℓ，在y軸上的投影長爲m，則 (A)$\ell>m$ (B)$\ell=m$ (C)$\ell<m$ (D)$\ell>3$ (E)$\ell>4$ （多選）

52. 將方程式$f(x,y)=0$的圖形上每一點沿着向量〔-1，-1〕的方向移動$\sqrt{2}$距離，然後，逆時針方向旋轉45°，到達新位置，則此圖形的新方程式爲 (A)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (B)$x^2+\frac{y^2}{4}=1$ (C)$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ (D)$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ (E)$y^2-\frac{x^2}{4}=1$

<分析>此試題由簡入繁，富有測出學生程度之價值，然所問者太多了，共11小題，較適合學校之段考，複習考，當然題組可視時間或時機命題。

<E> 應用問題在聯考的價值

<設>設有甲，乙兩地，乙在甲之正南方，今在甲地上立一垂直於地面的竹桿，其高爲1公尺，設某日正午，竹桿的日影正好朝北，其影長爲20公分，而此時太陽正好直射到乙地上，求甲，乙兩地的緯度差d（取最接近的正整數度數）。（在此我們假定地球爲一球形），照到地面的太陽光線皆平行，又若$|\tan\theta|<\frac{1}{4}$，則計算時，可以用θ代替$\tan\theta$或$\sin\theta$）

53. (A)$d\in\{0,5,6,7,8,15,16\}$或$d\geqq 20$ (B)$d\in\{1,5,9,10,11,17,18\}$或$d\geqq 20$ (C)$d\in\{2,6,9,12,13,15,17,19\}$或$d\geqq 20$ (D)$d\in\{3,7,10,12,14,15,16,17,19\}$ (E)$d\in\{4,8,11,13,14,16,18,19\}$ （多選）

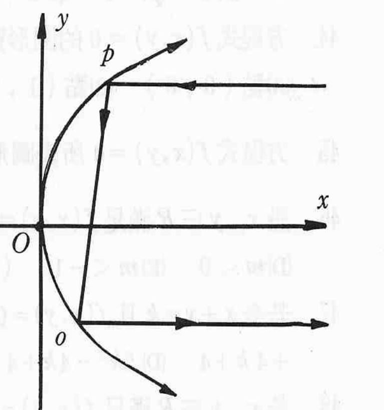
設甲，乙兩地的距離爲$p\cdot 10^{\alpha}+q\cdot 10^{\alpha-1}$公里（取兩位有效數字），$\alpha$爲正整數，$p,q\in\{0,1,2,3\cdots\cdots 7,8,9\}$且設地球的半徑長爲6400公里，則

54. (A)$P\in\{1,6,8\}$ (B)$P\in\{2,6,9\}$ (C)$P\in\{3,7,9\}$ (D)$P\in\{4,7,0\}$ (E)$P\in\{5,8,0\}$ （多選）

55. (A)$q\in\{1,6,8\}$ (B)$q\in\{2,6,9\}$ (C)$q\in\{3,7,9\}$ (D)$q\in\{4,7,0\}$ (E)$q\in\{5,8,0\}$ （多選） （註）54.，54.合計一題

<分析>：①目前聯考有需要此種試題，然份量不可多，因我們的學生很怕看到此種試題，當然這與程度有關，且只能測出高程度的同學（適合自然組之命題）

②此題要配合物理概念"太陽直射到乙地表陽光過球心"



<計>設與x軸平行而進行之光綫在拋物綫$y^2=x$上之二點P，Q反射（如圖）

令點P之y座標爲a（$a>0$），PQ之長爲$\ell a^2+\frac{1}{16a^2}+m$則

56. (A)$\ell=2$ (B)$\ell=1$ (C)$m=\frac{1}{3}$ (D)$m=\frac{1}{2}$ (E)$m=\frac{1}{4}$ （多選）

57. 設PQ長之最小値爲L，此時a之値爲a_o，則 (A)$L=2$ (B)$a_o=\frac{1}{3}$ (C)$L=1$ (D)$a_o=\frac{1}{2}$ (E)$a_o=\frac{1}{4}$ （多選）

<分析>：①此種此題適合自然組命題，

②利用光學原理光由P折射必過焦點

③此題計算繁雜，學生不易得分

<結論>①一份試卷一定要有簡易的試題，且要難易適中（本試卷將簡易部分省略）

②物美價廉之貨品，人人喜愛，並搶購之，不必花廣告費，人人照買，數學的命題亦不例外，誠之。

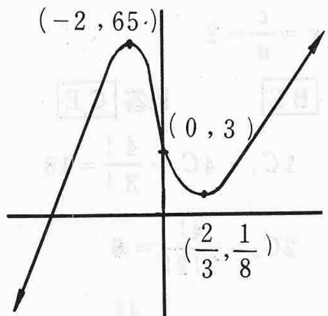
③提倡數學教育正常化，必須注意“根的教育”，猶如提倡體育，必須注重全民運動，只培養幾個明星球員，亦不能使國家強盛，共勉之。

談題組命題在聯考，段考，複習考的意義與價值性簡答

<中> 1. $a\triangle AOB=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$　$\boxed{答D}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 2n\times\sin\frac{2\pi}{2n}=$圓面積$=\pi\times1^2=\pi$　$\boxed{答D}$

<央>由圖示（配合多項函數求極值解之）



$\boxed{3. 答E}$

$\boxed{4. 答C}$

$\boxed{5. 答A}$

<研>Γ_1 ：$a=5$，$b=3$

Γ_2 ：$a=5$，$b=3$

Γ_3 ：$2a=10$ ，$2c=4$ ，$e=\frac{4}{5}$

Γ_4 ：$e=\frac{4}{5}$，$a=5\sqrt{2}$ ，$c=4\sqrt{2}$ ，$b=3\sqrt{2}$

Γ_5 ：$a=5$ ，$b=3$

Γ_6 ：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　∴外切矩形面積爲 $(2a)\cdot(2b)=60$

∴ 6. 答 $\boxed{BDE}$

7. 答 $\boxed{C}$

8. 答 $\boxed{D}$

<究>$d_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

又　$d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n+\cdots\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1$

$z_1\cdot z_2\cdots\cdots\cdot z_n=\cos\pi+i\sin\pi=-1$（由$Re'Morive's\ Thm$得）

9. 答 $\boxed{B}$　10. 答 $\boxed{D}$　11. 答 $\boxed{B}$

<院>$e=\frac{b}{a^2}$　當　$0<\frac{b}{a^2}<1$　則爲橢圓　$\Rightarrow P=\frac{81}{100}=0.81$

又

x	500	300	100	50
$f(x)$	$\frac{3}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{0}{100}$

$\Rightarrow E(x)=144$

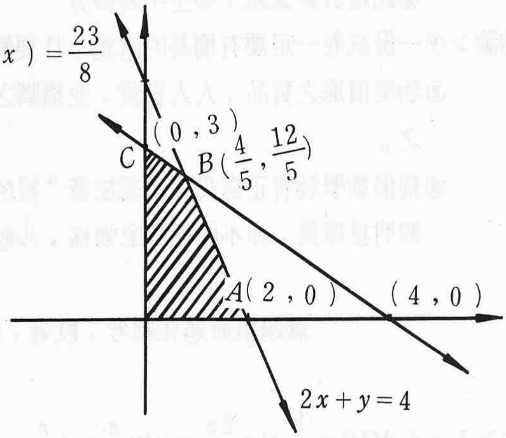
12. 答 $\boxed{C}$　13. 答 $\boxed{D}$

<數> $\because 5 \leq x \leq 8$ 且 $-5 \leq x < -1$　$\therefore x = 5, 6, 7, 8, -2, -3, -4, -5$ 共8個

又

x	1	3	4
$f(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

$\therefore E(x) = \frac{23}{8}$



14.答 $\boxed{C}$　　15.答 $\boxed{B}$

<學> ①由線性規劃知　當 $(\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$ 有最大值

$M = x + y = \frac{16}{5}$

②令 $xy = k$　$\Rightarrow x_2 = 1$，$y_2 = 2$ 時

有 $M' = 2$

$\therefore$　16.答 $\boxed{CDE}$　　17.答 $\boxed{AC}$

<傳> 18.解　$\begin{matrix} x + y + k = 0 \\ x^2 + 4xy + y^2 = 6 \end{matrix}$　$\Rightarrow$　$2y^2 + 2ky - k^2 + 6 = 0$　$\xRightarrow{\triangle = 0}$　$k = \pm 2$

19.解　$a = \sqrt{2}$，　$b = \sqrt{6}$，　$c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\therefore e = \frac{c}{a} = 2$

$\therefore$　18.答 $\boxed{BE}$　　19.答 $\boxed{CE}$

<播> 三同一異　$1C_1 \cdot 4C_1 \cdot \frac{4!}{3!} = 16$

二同二同　$2C_2 \cdot \frac{4!}{2!2!} = 6$

二同二異　$2C_1 \cdot 4C_2 \cdot \frac{4!}{2!} = 144$　　共186

四異　$5C_4 \cdot 4! = 120$

$\therefore$ $\boxed{\text{20.答 AB　　21.答 ADE　　22.答 ACD}}$

<季> $|S - S_n| = \frac{|Z|^n}{|1 - Z|}$　　又 $|1 - Z| = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$|Z| = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\frac{|Z|^n}{|1 - Z|} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2^{n-1}}} < 10^{-5}$　取對數　$n > 16 \cdots\cdots$　$\therefore n = 17$

$\therefore$　23.答 $\boxed{ABD}$　　24.答 $\boxed{AD}$

<刊> $f(x) = a\left[(x^2 + 2x + 4) + \frac{3}{2}\right]^2 - \frac{9}{4}a + b = a\left[(x+1)^2 + \frac{9}{2}\right]a + b$

當 $x = -1$ 時　$m = \frac{81}{4}a - \frac{9}{4}a + b = 37$　$\cdots\cdots\cdots$①

$\Rightarrow a = 2$，$b = 1$

又 $f(-2) = \frac{121}{4}a - \frac{9}{4}a + b = 57$　$\cdots\cdots\cdots$②

又 $f(1) = 144 \in [101, 150]$　　$\therefore$

$\therefore$ $\boxed{\text{25.答 AB　　26.答 A　　27.答 C}}$

<演>

令二根爲 α，α^2　$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \alpha^2 = -p & \cdots\cdots① \\ \alpha^3 = q & \cdots\cdots② \end{cases}$　$\Rightarrow$　$p^3 - (3p - 1)q + q^2 = 0$

$\therefore l = 3$，$m = 1$，$n = 2$

$\boxed{\text{28.答 AB　　29.答 A　　30.答 B}}$

練）解）∵ $sin^4\theta + cos^4\theta = 1-\frac{1}{2}sin^2{}_2\theta$ 但 $0\le sin^2{}_2\theta \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\le sin^4\theta+cos^4\theta\le 1$

$\therefore log_{\frac{1}{2}}{}^{\frac{1}{2}} \ge log_{\frac{1}{2}}(sin^4\theta+cos^4\theta)\ge log_{\frac{1}{2}}{}^{0} \quad \Rightarrow 0\le log_{\frac{1}{2}}(sin^4\theta+cos^4\theta)\le 1$

$\therefore M=1$，$m=0$

∴　31.答A　　32.答C E

＜題＞$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}$　　又 $f(\frac{1}{a})=\frac{-1+ac}{a}=-2\Rightarrow \quad ac=1-2a$ ………①

又 $2x=ax^2-2x+c\Rightarrow\frac{4-ac}{a^2}=1\Rightarrow 4-(1-2a)=a^2\Rightarrow a^2-2a-3=0$

$\Rightarrow a=3$ 或 $a=-1$（不合）　$\Rightarrow c=-\frac{5}{3}$

33.答 A C　　34.答B

＜部＞①由自然數平方的個位數字爲 $1^2\to1$，$2^2\to4$，$3^2\to9$，$4^2\to6$，$5^2\to5$，$6^2\to6$，$7^2\to9$，$8^2\to4$，$9^2\to1$，$10^2\to0$，$11^2\to1$………

②$1!=1$，$1!+2!=3$，$1!+2!+3!=9$，$1!+2!+3!+4!=33$，$1!+2!+\cdots\cdots+5!=153$，$1!+2!+\cdots\cdots+6!=873$……

∴　由②知 z 之個位數字只可能1，3，9

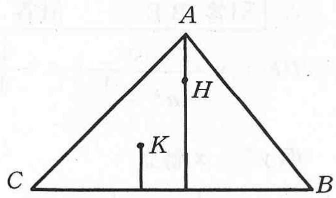
∵ y^2 之個位數字只能1，4，9，6，0

又 z 之個位數字可能1，3，9

故能滿足 $y^2=z$ 之解　只有 $\begin{cases} x=y=1, & z=1 \\ x=y=3, & z=9 \end{cases}$　兩組

∴　35.答 A D　　36.答 C　　37.答 A

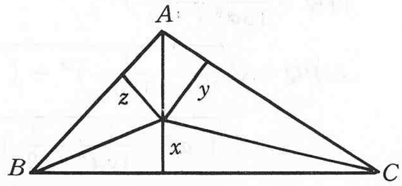
＜分＞①　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$



②　$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=18$

③　$6=25m+n$
$6=6m+36n$　$\Rightarrow m=\frac{5}{24}$，$n=\frac{9}{144}$

④　$a\triangle ABC=\frac{1}{2}(\pi x+6y+5z)=6\sqrt{6}\quad\Rightarrow k=6\sqrt{6}$



⑤　由柯西不等式知
$x^2+y^2+z^2\ge\frac{864}{110}<8$

∴　38.答 B C　　39.答 A C　　40.答 C　　41.答 B D

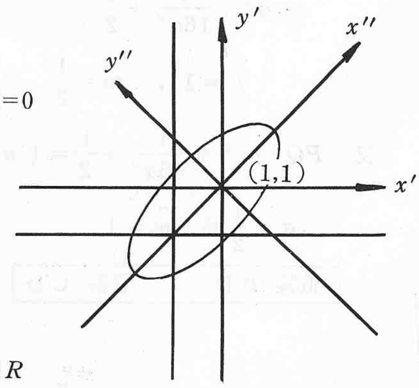
＜師＞42.解　$m=f(1,1)=-8$

答：A B C E

43.解　將坐標軸平移至（1，1）得 $5x'^2-6x'y'+5y'^2-8=0$

再旋轉 45°
$\Rightarrow\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{1}=1$

$\therefore e=\frac{\sqrt{3}}{2}$



∴　43.答 D　　44.答 B D E　　45.答 B

46.解　令　$x+y=k\Rightarrow y=k-x$ 代入 $f(x,y)=0$ 中

$\Rightarrow\quad 16x^2-16kx+(5k^2-4k-4)=0\quad\because x\in R$

$\therefore \triangle \geq 0 \Rightarrow 2-2\sqrt{2} \leq k \leq 2+2\sqrt{2}$

$\therefore$ 46.答 B C D

47.解 $\because f(x, y)=5(x+y)^2-16xy-4(x+y)-4=0$

$\Rightarrow 16xy=5k^2-4k-4$

$\therefore$ $\boxed{\text{47.答 E}}$

48.解 $xy=\frac{5}{16}(k-\frac{2}{5})^2-\frac{3}{10}$ 又 $2-2\sqrt{2} \leq k \leq 2+2\sqrt{2}$

$\therefore xy$ 有最大值亦有最小值

$\therefore$ $\boxed{\text{48.答 A B E}}$

49.解 $x^2+y^2-2x-2y+2=(x+1)^2+(y-1)^2$ $\therefore a^2=4$, $b^2=1$

$\therefore$ $\boxed{\text{49.答 B C E} \quad \text{50.答 A C E}}$

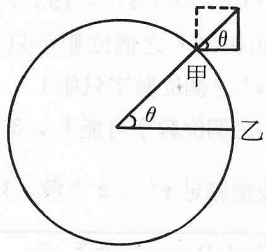
51.解 $f(x, y)=0$ 在 x 軸上之投影長就是橢圓兩鉛直切線間之距離，在 y 軸上之投影長就是兩水平切線間之距離

令

令 $x=k$ 代入原方程式 $\xrightarrow{\triangle=0}$ $k=1\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ $\therefore l=m=2\sqrt{5}$

$\boxed{\text{51.答 B C D}}$

52.解 $\frac{x''^2}{1}+\frac{y''^2}{4}=1$ $\boxed{\text{答 B}}$



<設> $\tan\theta=\frac{0.2}{1}<\frac{1}{4}$ $\therefore \theta=0.2$

又 $S=r\theta=6400\times0{,}2=1280 \doteqdot 1300$

$\therefore$ $\boxed{\text{53.答 B E} \quad \text{54.答 A} \quad \text{55.答 C}}$

<計> PF : $y=\frac{a}{a^2-\frac{1}{4}}(x-\frac{1}{4})$

與 $y^2=x$ 聯立

得 $Q(\frac{1}{16a^2}, -\frac{1}{4a})$

$\therefore PQ=\sqrt{(a^2-\frac{1}{16a^2})^2+(a+\frac{1}{4a})^2}$

$=\sqrt{(a^2+\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2})^2}$ $(\because a>0)$

$=a^2+\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2}$

$\therefore$ $l=1$, $m=\frac{1}{2}$

又 $PQ=a^2+\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2}=(a-\frac{1}{4a})^2+1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 時，$m=1$

$\therefore$ $\boxed{\text{56.答 B D} \quad \text{57.答 C D}}$