閒話樹形圖的應用

戴久永　交通大學運輸管理系

近些年來，國內工商業的成長快速是世人有目共睹的事實，這種進步促使社會結構發生變化，無形中使得人們也變得較爲現實。現在的學生學數學，最愛講的是「學了數學有什麼用？」，這種態度自然並沒有錯，然而過於強調「有什麼用」却非十分健全的態度。談到數學的應用，有人把它分成「內應用」和「外應用」。所謂「內應用」就是把數學的結果用以解決其他數學問題，譬如我們在解固有值問題時要利用代數的分解因式。「外應用」是把數學應用於數學之外的學科，例如把數學用於物理學。另外也有人把數學分爲短程的應用和長程的應用。所謂短程的應用是學會後立刻就可派上用場，例如學了算術，上街買東西就可應用。長程的應用則是屬於較高層次的應用，這類數學在理論發展的當時，並不知道有什麼用，事隔多年，人們才發現其實用價值，譬如布氏代數（Boolean algebra）原先純然是理論的分析，似乎一無所用，然而誰也想不到在五十餘年之後却在設計電子計算機上佔有重要地位；又如圖形理論（graph theevy）最早起源於尤拉的「克橋問題」（Konigsberg bridge problem），當時也是純理論的討論而已，如今却大量採用於遺傳學，生態學，交通流量以及通訊等各方面。這些長程應用之所以會如此，全然是由於理論的發展領先技術或實用性的原故，所以不是無用，而是時間未到。

一般人所宣稱或想像的應用實僅止於最低層次日常生活中的應用而已，就這個層次而言，確實有許多高中數學「一無用處」，自然無法令人感受其實用性了，有許多人必然因此會說，「我將來也不準備成爲科學家，從事高深的科學研究工作，既然許多高中數學對我一無所用，又何必浪費青春去學它呢？」這實是一種似是而非的近視想法。我們學習數學，除了注重它對解決問題的實用價值之外，更應厚植我們的欣賞力和好奇心，希望藉著它潛移默化之力，使我們被緊緊壓縮在文明的重累之下的頭腦，活動起來，培養起自由奔放的思考力。因爲現代的人每天過著例行公式的刻板生活，腦筋痲痺，當然無法產生偉大的獨創力或豐富的想像力，來應付所面臨的生活挑戰，學習數學，使頭腦呈現冷靜的深思能力，正是「治療」現代文明病的良方。再進一步來說，數學是人類文化、心智結晶重要的一環，身爲現代文明人，對數學一無所知，無疑是知識份子的一大缺憾。

現在言歸正傳。樹形圖（tree diagram）是一種很簡單的數學方法，高中生大概都會學過它。在本文中，筆者將討論其三大應用，來說明數學方法的應用，「運用之妙，存乎一心」。

首先介紹樹形圖在計數上的應用。當我們面臨列舉數項事件的所有可能發生情形的問題時，若其中每一事件均有有限種發生的方式，這時樹形圖是個理想的計數工具。我們以下列數例說明之：

例1　某甲參加猜銅板正反遊戲至多5次，每次輸贏爲一元。現假設甲邊僅存一元，若在5次前輸光或贏了3元（即共有4元）就停止，試列舉所有可能發生的情形：

解：

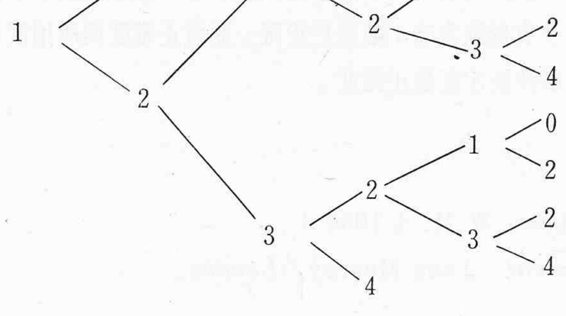


圖1

由上圖可知可能發生的情形共有11種，其中末點的數值代表甲最後所有錢數。圖1顯示甲於猜5次前停止的可能情形只有3種。

例2　甲乙二人進行象棋比賽，事先約定連勝二局或共勝三局者為贏家，試問共有多少可能發生的情形

解：

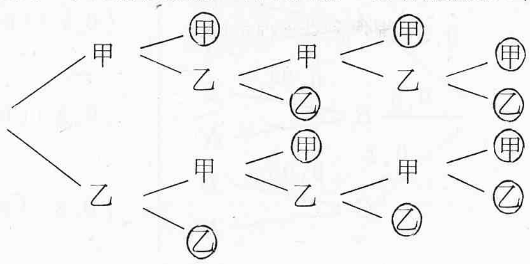


圖2

在圖2中有10末點，相對於10種可能發生的情形。由樹形的起點沿每一路徑（*Path*　）至末點代表一種輸贏的可能情形，並且出現於末點者勝。

例3　在圖3中，A、B、C……F代表小島，其間連接線為橋，甲由A島開始逐島環行，每條橋僅能通過一次，試問甲有多少種可能的走法

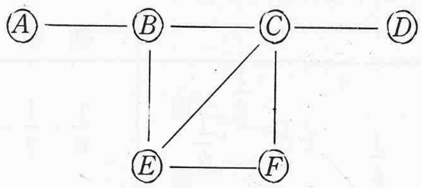


圖3

解：

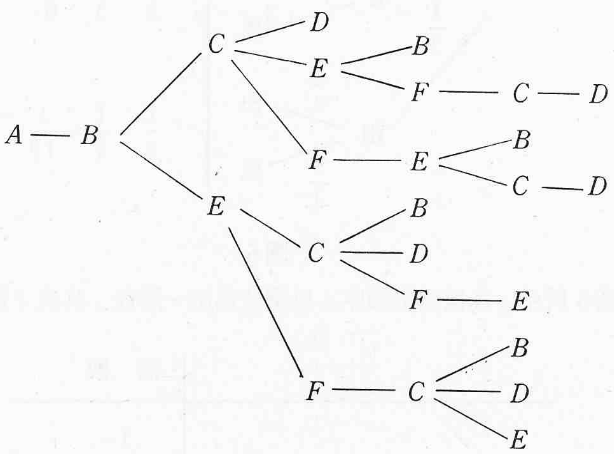


圖4

由以上三例可見，樹形圖的確為一種有用的計數工具。但是同時，我們也發現當所牽涉的事件增多時，樹形圖會變得相當複雜而不切實際。

其次，我們再談一下樹形圖在機率問題方面的應用。這也是為一般人所熟知的方法。樹形圖在機率理論中，大多用來解決與貝氏定理相關的問題。

例4　某工廠有三部機器A，B和C，其生產量分別佔總產量的50％，30％和20％　。若已知各機器生產不良品的百分率為3％，4％和5％，現隨機自產品中抽取一個，試問該產品為不良品的機率為若干？

解：

設D表不良品，N表良品，則

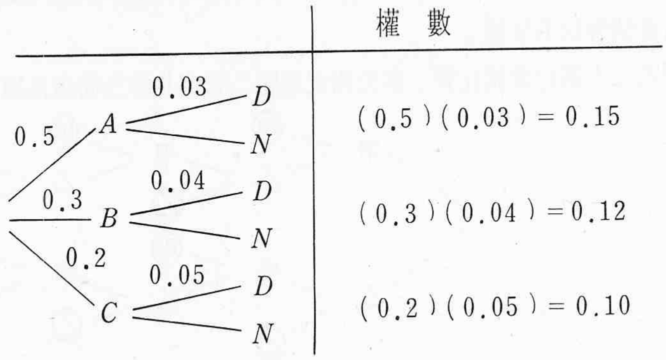


圖5

該產品爲不良品的機率爲　　$0.15 + 0.12 + 0.10 = 0.37$

例5　設某人有三袋，每袋內均有一白球，另外，第I袋內尚裝有一黑球，第II袋有二黑球，第III袋有三黑球。今任選一袋，再由其中任選一球。設選中第I、II、III袋的機率分別爲$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$，若已知選得白球，試問這項新資料對各袋的選取機率是否有所影響

解：

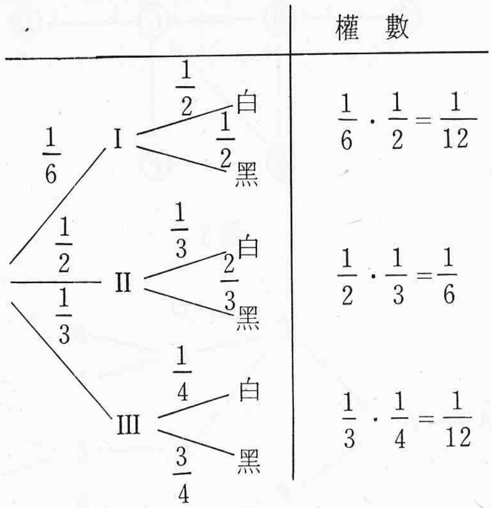


圖6

首先繪出樹形圖如圖6所示。其次變更順序，以選球爲第一階段，其次才選袋，將樹形圖重繪一次。

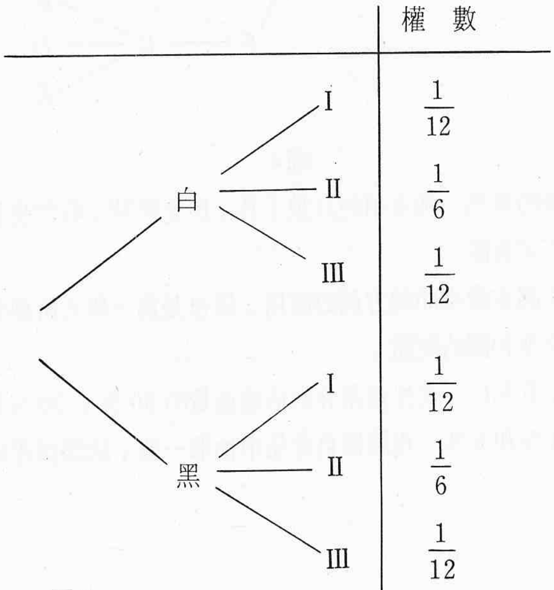


圖7

由圖 6 可知選取白球的機率爲 $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

由於圖 7 與圖 6 的差別僅爲順序而已，因此各路徑的棋數仍然不變。

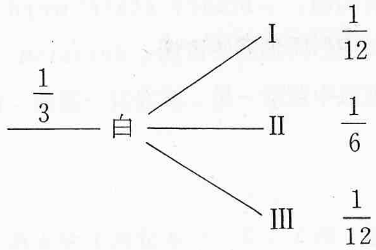


圖 8

現在只要再計算第二階段的權數。我們利用除法即可求出。因此由白球出發的各分支，其權數應分別爲$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$。我們把已知取得白球的事前和事後機率總結如下

選取袋號	I	II	III
事前機率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
事後機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由上表可知若已知所取爲白球，對於各袋的選取機率確實有所影響。

最後，我們將介紹樹形圖在解決邏輯性問題的應用，這方面或許是較爲人所忽視不熟悉的部份。

例 6　甲乙丙三人爲鄰居，已知其中一人爲牙醫，一人爲工程師，另一人爲某公司經理。關於他們個人的資料僅知

「甲爲乙的太太的堂兄，收入比工程師多，牙醫是個單身漢，收入爲三人中最少者。」

試依據上述資料，決定各人的職業。

解：根據上述資料，可得如下條件：

(1)甲收入比工程師多

(2)甲爲乙的太太的堂兄

(3)牙醫爲三人中收入最少的

(4)牙醫爲單身漢

首先我們分析甲的職業，由(1)知甲必不爲工程師，又由(3)知甲必不爲牙醫。因此得知甲爲經理

圖 9

其次討論乙的職業。乙可能爲牙醫或工程師。但由(2)知乙必不爲牙醫，因爲乙爲已婚。因此乙必爲工程師，丙必爲牙醫。

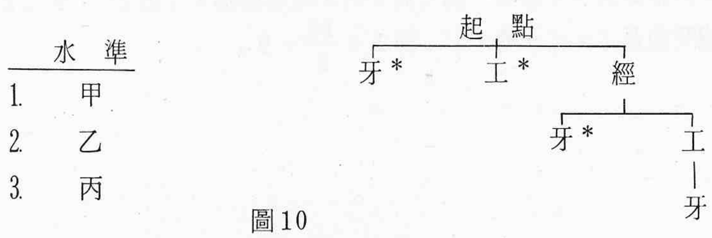


圖 10

在本例中，我們由甲開始分析，主要是因爲關於甲的資料最多的原故。本例也可將水準改爲職業而非個人來討論，讀者可試試看。

接下來我們將利用樹形圖解決「雙狀況問題」(binary state word problem)，也就是每個問句僅有「是」或「否」兩個答案的問題。這時樹形圖稱爲決策樹(decision tree)。

例7　某人由1至8(含1和8)內的正整數中選取一數，試設計一策略，能以至多問他三個「是或否」的問題猜出他所選取的數字

解：

首先設x爲該正整數，並問一個問題，將1，2……8分成1至4和5至8兩組。例如「$x<5$嗎」？全部過程如下圖所示

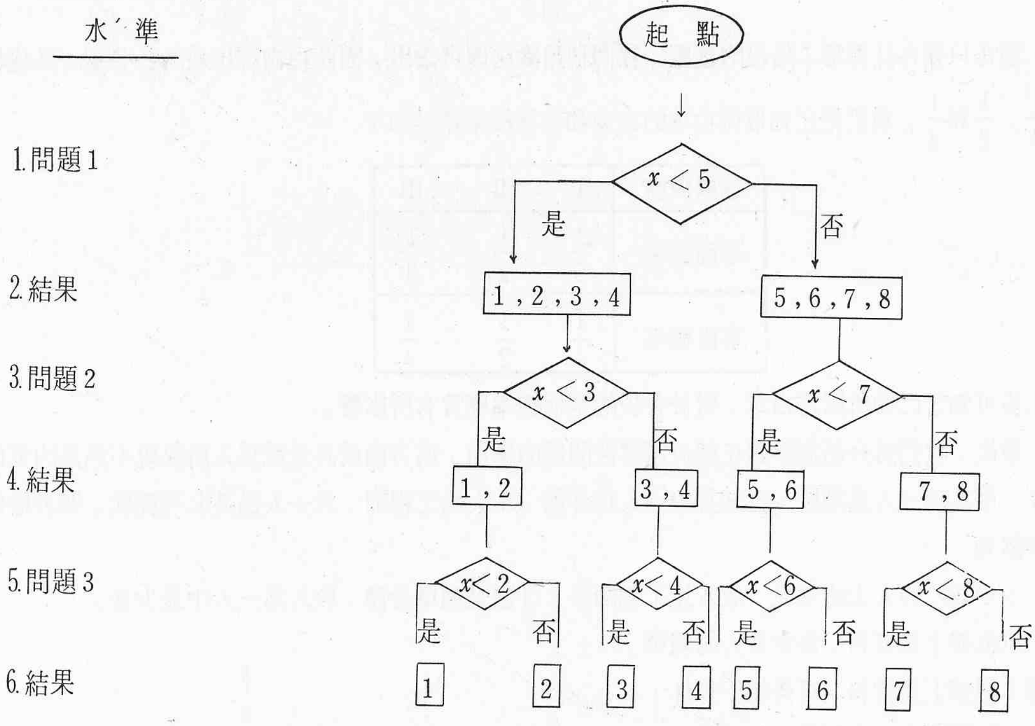


圖11

圖11 可輕易地推廣，其每個問題的形式爲

「$x<$(組內最小正整數加上組內整數個數之半)嗎？」例如上例中，1至8的最小整數爲1，而個數之半爲4，因此得「$x<5$嗎？」本法適用於任何8個連續的正整數。例如2至9，3至10等等。

其次，我們要指出本法可推廣爲「若某人自2^n個連續的正整數中任選一數，則可至多問n個問題，即可正確地猜出該數」。對於「爲什麼如此」感興趣的讀者請參閱數學傳播第二卷第三期中劉豐哲所寫「機率與訊息」一文的解說。

另外，本法也可適用於任何非2^n個的連續整數的猜測，辦法是將該問題視同含2^n個數，其中n爲第一個使2^n比該組個數多的正整數。

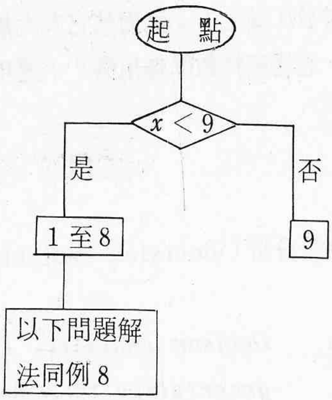
例8　若將上例改爲1至9，試問至少應問多少個「是或否」的問題方能猜出該數？

解：

由於9無法用2的冪數表示，而第一個大於9的2的冪數爲4，因$2^3<9<2^4$，因此至少得問4次，而且第一個問題是「$x<9$嗎？」，因$1+\dfrac{16}{2}=9$。

水　準

1. 問題 1
2. 結果
3. 問題 2 ， 3 ， 4

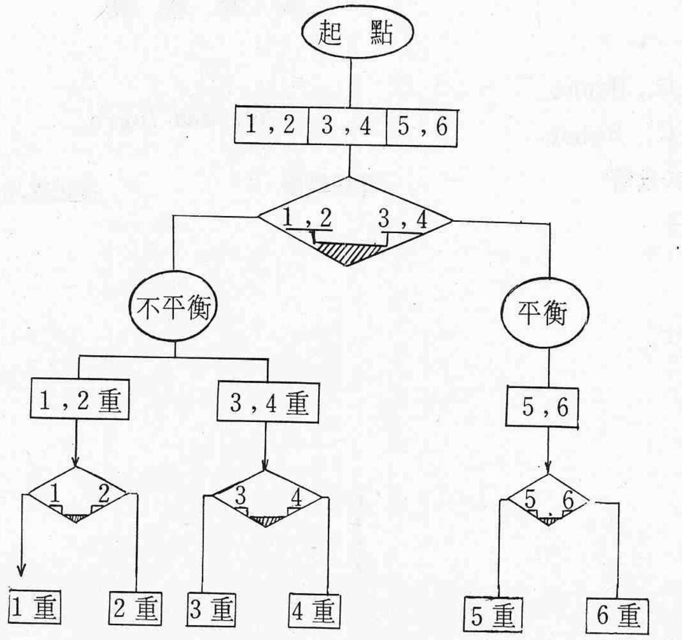


例 9　某人有 6 枚金幣，其中一枚爲僞幣，若已知僞幣比其他各枚金幣爲重，試設計一種策略，只在天平上秤兩次，就找出僞幣。

解：

水　準

1. 分組
2. 秤第一次
3. 事件
4. 結果
5. 秤第二次
6. 事件與結果



首先將金幣兩枚一組分成三組，將 1 ， 2 和 3 ， 4 分別放在天平的兩邊，這時有兩種情形之一發生；不平衡或平衡。倘若爲不平衡，設若 1 ， 2 較重，則再將 1 與 2 分置天平兩邊，若 1 重，則知金幣 1 爲僞幣，否則 2 爲僞幣。金幣 3 和 4 的情形類似，讀者試自討論之。若（ 1 ， 2 ）和（ 3 ， 4 ）爲平衡，則第二次秤金幣（ 5 ， 6 ）。其中一枚必爲僞幣。

讀者也可將 6 枚金幣一組 3 個地分成兩組。但是這種方式不易推廣，上例的分配方式則可便於推廣至在更多枚金幣中含 1 枚僞幣的解法。另外，若在本例中，我們並不知僞幣爲較重或較輕，則至少需秤幾次？讀者試自解之。

依據以上的討論，我們可知樹形圖的威力了。莊子逍遙篇中有如下的一個故事：惠子對莊子說：「魏王送我一粒大葫蘆的種子，我種植成長而結出果實有五石之大。用它來盛水，它的堅固程度却不能勝任；將它割開來做瓢，則瓢大無處可容。不是不大，我認爲它沒有用處，就把它打碎了。」莊子說：「你眞是不善於使用大的東西啊！有個宋人世代以漂洗絲絮爲業，家中祖傳一種保持手不龜裂的秘方。有一個客人聽說這種藥物，願意出百金收買他的藥方。於是他聚合全家人來商議說：『我家世代漂洗絲絮，所得僅夠餬口，現在一旦賣了這個藥方，就可得到百金，就賣了吧！』這個客人得到藥方，便去遊說吳王。這時越國犯難，吳王就派他將兵，冬天與越人水戰，大敗越人，於是吳王割地封賞他。同樣是一種不龜裂手的藥方，有人因此得到封賞，有人却只是用來漂洗絲絮，這就是用法的不同。現在你有五石容量的葫蘆，爲什

麼不繫著當作腰舟而浮游於江湖之上，反而愁它太大無處可容呢？可見你的心還是茅塞不通啊！」這個故事給了我們很大的啓示，您還堅持數學無用嗎？「運用之妙，存乎一心」而已。

附　註

樹形圖在統計學的決策分析（decision analysis）或決策理論中用到很多，有興趣的讀者可參閱下列二書：

1. Howard Raiffa　*Decison analysis, Introductory lectures on choices under uncertainty* 1968 *Addison- Wesley. Inc.*
2. J. Morgan Jones　*Introduction to decision theory* 1977 *Richard D. Irwin Inc.*

參考料資

1. S.C. Hanna, J.C. Seber　*Set and logic*　*Richard D Irwin Inc.* 1971
2. 戴久永著　管理數學　達嵐實用數學叢書之二　（待版中）
3. 莊子