

統計學淺釋 (二)

度 量

黃登源 中央研究院數學研究所

我們已經談過由數據中獲取適當資訊應注意事項，現在我們來談談對於數據之正確度及精確度的問題。首先我們必須瞭解度量的意義，例如你今天呼吸多少空氣？在糖菓中含多少卡路里熱量？到月球有多遠？讀這一頁書需多少時間？所有這些問題我們都可以度量來回答。其他如食物，飲水，空氣，光，熱，電，聲音，視線，智力及跑的速度等也可以量度。

但是關於度量之意義為何？事物如何量度？何人發明單位以量度事物？我們如何將量度量化？在數學世界裏若要現代化瞭解這些問題是非常重要的事情。

假設我們向菜販買十七個蘋果重三公斤共值新台幣四百元。在此個案中有三個度量。每一個度量使用一個數字以描述一些性質。蘋果數量，重量及價格分別以十七，三及四百來描述。而對每一個數字分別配以一個度量單位如十七個，三公斤，四百元。我們可以定義度量為對一個數據配以量度單位作為描述人或物的一些性質之用。

當我們談到度量必須把事物與其性質分開。事物係指一般物體如盒子或足球等。事物之性質提示特性如顏色，長度，重量或智力等。我們通常是度量性質而不是事物，就如同我們不量度老王而量度他的身高，重量或體溫。因此度量可以給我們一些資訊，如老王 175 公分高比老王是個高個子有更多資訊，若說張三太胖不如說張三重 100 公斤來得清楚。

量測的重要部份為度量單位。我們使用長度如——稱為一公分，以量度線段的長度。

度量開始於比較事物，由於比較，人類可決定一群動物大於另一群。當數字發展以後，比較才以計數處理，後來發展出較好的度量單位。

度量單位之使用開始很簡單，如使用足，手，拇指，或步長等。在此方法中，有方便的量測刻度如使用石頭量度重量，利用太陽或月亮以指出時間或季節。

這些度量單位並不總是相似，如某人的足大於另一人；某些石頭重過他人；某些日子長過其他日子。因此，當人類開始造房子，用船航行，貿易及分割土地等，這些自然量測方法就不夠好。在現代工商發達更需標準刻度以量測。

當度量改進以後，產生很多新發明和更好產品。在人類文明成長過程可以證實這種事實。目前，近代工業造了許多需要精確量度之零件。正確量度工具使這些精確量度可能做到。方便的度量單位，標準量測刻度，精確量測工具，及計算量測數量系統為有用量度系統的主要部份。度量之意義為數學，科學與機械之組合。當數學，科學及機械改進時，量度就跟著改良了；有更佳量測能力的人可創造新觀念的世界，新材料及新機械。

度量用來決定多少或多大。這種決定通常由工具如尺，溫度計，鐘或量測杯等讀到的數字。這些數目為某種量的度量單位數。用同單位之度量可用來比較大小。當我們敘述或記錄度量時應該指明使用單位，例如，若某人說他的兄弟年歲是 10，我們可能懷疑是 10 天，10 週，10 個月或 10 歲大。

當我們量測時，通常用計數，直接使用量度工具或間接計算三種方法中的一種。計數通常用來決定度量單位不能以分數表示量測，由計數決定之度量中分數無意義，例如我們說二分之一個小孩並無意義。在這些計數量度中之度量單位為一個對象如小孩等。計數所得結果是準確的。

當我們以量度工具之單位比較量測對象時，我們使用的是直接量度。當我們用尺量測一張紙的長度時，我們使用工具得到直接量度。

當我們不能直接使用量測工具於欲量度之對象時，我們可使用間接量度。

計數量度稱為離散數據。由使用量測工具如尺者稱為連續數據，這些量測所給之連續數據難以準確。重量量測為連續數據的例子。我們能量測我們的重量以任何分數單位，如 $65\frac{5}{16}$ 公斤。若使用更精確刻度我們可能發現重量是 $65\frac{9}{32}$ 公斤。不同刻度可能得不同結果。

近似與度量

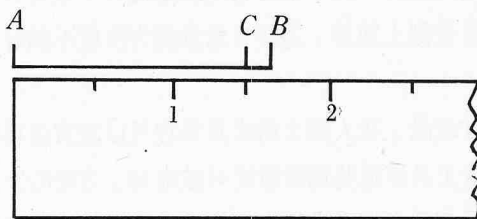
欲量測一對象，我們通常以在量測工具上所代表之單位做為度量，例如我們以尺量測長度，以杯子量測體積或以天平稱重量。與標準單位直接比較所得之量度稱直接量度。

我們沒有工具直接表示時間之標準單位，如含有許多齒輪、輪子及彈簧的時鐘，指針繞著針面移動，指針移動之距離（或移動之角度）間接表示某些時間單位之經過，時鐘之時間量度為間接量度之例。另外間接量度如溫度之量度。當流體加熱膨脹時，若我們將流體放進密閉玻璃管中，脹或縮可告訴我們溫度改變多少。因此，溫度由在管中之流體水平間接量度。任何時候我們做計算以獲得度量為間接量度。

量測之精確度

量測工具用於量度適用於我們量測的對象。例如，溫度計用來量測溫度而不是空氣壓力。我們所使用的量測工具可能也適用於量度大小，例如汽車之里程計可用以量測兩鎮之間的距離。在量測工具上之刻度通常標示度量單位，例如，尺可能標示一吋為 8 個刻度。工具能量測之單位越小其量測越精確。量度之精確性依賴於使用度量單位之大小。刻度讀數為吋者比為呎者更精確。為量測精確度之目的我們考慮 $5\frac{6}{8}$ 吋比 $5\frac{3}{4}$ 吋更精確。第一種量度指出使用一吋的 8 個刻度，第二種為一吋之 4 個刻度。度量 $5\frac{6}{8}$ 吋不可化簡為 $5\frac{3}{4}$ 吋，因為分母表示量測刻度單位之大小。

量度誤差為實際長度與記錄長度之差，在下圖中 \overline{AB} 線段記錄長度為 $1\frac{1}{2}$ 吋，而 \overline{CB} 之長為 \overline{AB} 量度之誤差：



若刻度以 $\frac{1}{4}$ 吋為單位，則誤差應少於 $\frac{1}{4}$ 吋。因此，誤差量依賴於使用量測工具之刻度。量度誤差不應考慮為錯誤，而應認為使用工具之限制的結果。

實際長度與記錄長度最大可能誤差稱為絕對誤差。這並不意味由工具之每個量度必有這些誤差量。量測刻度之單位越小絕對誤差越小，量度越精確。因此，絕對誤差為表示量度精確度的一種方法。

度量之正確度

雖然兩個記錄度量可能有相同之精確度，但某一絕對誤差大小可能比另一更重要。 $\frac{1}{2}$ 吋之誤差對於量測庭院之寬度不重要，但可能對造廚房食櫥很嚴重的錯誤。

對於用最靠近刻度之量測法的精確度，假設我們量測 8 吋與 80 吋，這兩種量度之絕對誤差為 0.5 吋，這些度量可表為： (8 ± 0.5) 吋及 (80 ± 0.5) 吋

顯然，誤差 0.5 在 8 中大過於 80。我們表示絕對誤差與記錄度量之比如下：

$$\frac{0.5}{8} = 6.25 \% \quad \text{及}$$

$$\frac{0.5}{80} = 0.625 \%$$

這些百分比的比較顯示第一度量之誤差比第二度量嚴重。上面的比值稱為度量之相對誤差。相對誤差以下列公式表示：

$$\text{相對誤差} = \frac{\text{絕對誤差}}{\text{記錄度量}}。$$

百分比誤差等於相對誤差乘以 100。一度量之正確度以相對誤差表之。相對誤差越小度量正確度越大。正確度與精確度不要混淆。度量之精確度為絕對誤差所決定，正確度為相對誤差所決定。

有效數字

有效數字可定義為影響量測正確度之數字。決定數字是否有效的方法為看看我們使用度量單位大小。如下表：

度量讀數	最小度量單位	度量單位數	有效數字數目
475 吋	1 吋	475	3
5600 呎	100 呎	56	2
2.86 公分	0.01 公分	286	3
8.056 秒	0.001 秒	8056	4
0.0005 克	0.0001 克	5	1
93.0 吋	0.1 吋	930	3
0.0670 公斤	0.0001 公斤	670	3

找到基本度量單位及使用單位次數，我們可決定表示該度量數量之有效數字。

我們再看看下列：

度量	最小度量單位	絕對誤差	相對誤差
5.6 米	0.1 米	0.05 米	$\frac{0.05}{5.6} = 0.0089$
560 米	10 米	5 米	$\frac{5}{560} = 0.0089$
0.056 米	0.001 米	0.0005 米	$\frac{0.0005}{0.056} = 0.0089$
5600 米	100 米	50 米	$\frac{50}{5600} = 0.0089$

所有這些度量之相對誤差，或正確度均一樣。上例顯示雖每個度量之基本度量單位不同，在每一個度量中之單位數均為 56。因此，每一個度量有 5 與 6 兩個有效數字。考慮這些數字有效因為它們可用來表示度量之正確度。在一度量中有更多有效數字者，度量更正確。度量正確度與所用度量單位無關。在一數目中我們找到有效數字因此我們可很快決定度量正確度。

參考資料

Johnson, D.A. and Glenn, W.H. (1960).
The world of measurement. John Murray, London.