高中解析幾何後記

黃武雄 講述　　台灣大學數學系
阮貞德 筆記

這幾年來，幾何課程在大學普遍不受重視，不知在暑修班的情形是不是也一樣？事實上幾何的訓練幫助學生較直覺的去看一個問題，同時因爲幾何發展源遠流長，一些古典的內容似乎不宜言廢。

目前的情況是：高中解析幾何中留下來的一些問題在大學裡並沒有交待它們在十九世紀怎樣得到完滿的解決。相應地，高中代數——基本上是方程式論——，到大學裡便交待了*Galois Theory*，作爲方程式論的完結篇。高中的排列組合在大學課程中也有機率與統計來提升它，而往上發展。只有解析幾何，除了以它爲部份的基礎，發展微積分外，大家好像忘記了非歐幾何與射影幾何。在數學思想發達史上，曾猛烈衝擊歐氏幾何兩千多年來無比權威的壟斷地位。非歐幾何從歐幾里得幾何的公理結構上去掙脫西方重質數學（*qualitative mathematics*）的人爲束縛〔1〕。射影幾何則站在結合歐氏平面的線性代數結構與幾何結構的立場上去彌補歐氏平面的缺陷。這番幾何學上的革命與微積分（及分析的嚴格塞石），*Galois* 理論的創立，因爲近代數學思想史上的大事。

現在，這段歷史在各大學都不教了（在暑修班也是不教？）。只是從來沒有人好好說明過爲什麼不教，是不是美國大多數的大學都不教的緣故？（在美國，學分析、學代數的人多，學幾何的人少。後者只好集中在可數的幾個大學校。）在自由經濟的社會，不能單從熱門的程度來說明什麼是重要的，什麼是次要的。前十年*Topology* 很熱門，近幾年學的人就少多了。天下事有起伏不定，一天到晚都在變的，也有不斷在進步，但持續而有規律的，教育是長期的工作，要看住的是那些持續在進步的事物。

非歐幾何是異於歐氏幾何的另一種幾何，它承認了歐氏幾何的前四個公理：

Ⅰ、*Axiom of Incidence*（關聯公理）

Ⅱ. *Axiom of Betweeness*（次序公理）

Ⅲ. *Axiom of Motion*（全等公理）

Ⅳ. *Axiom of Continuity*（完備公理）

但將第五個公理（即所謂平行公理*Axiom of Parallelism*）：

Ⅴ.「過一直線外一點，有唯一的一條直線與原來直線永不相交（意即平行）」。

改成

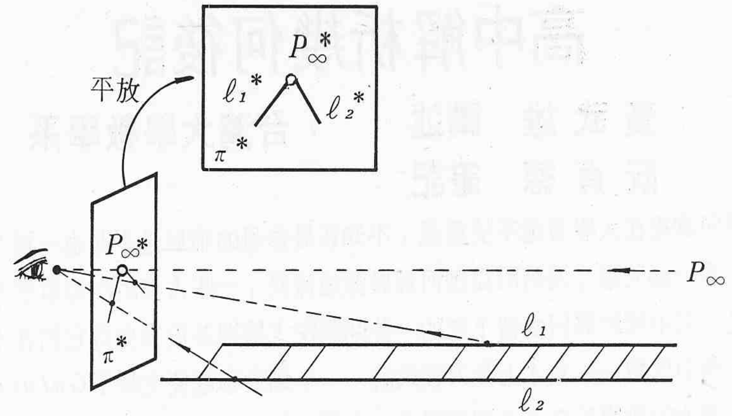
Ⅴ.「過一直線外一點，有無窮多條直線與原來直線永不相交」。

基本上，非歐幾何不同於歐氏幾何，就像球面幾何異於平面幾何一樣，但射影幾何却是歐氏幾何的延續，是歐氏幾何的拓廣。今天我們不談非歐幾何，因爲介紹非歐幾何的入門書較豐富，我們來談射影幾何，沒法在一個小時中，把射影幾何的精神講出來。

§1

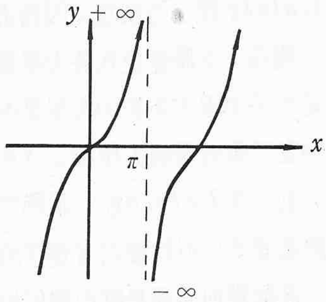
很多人小時候都曾遇到一個迷惑不解的問題：

「在平坦的地平面上（假定大地像古代人所想像的那樣平坦而無垠），平行鐵軌一直伸展出去，它們會不會相交在無窮遠處？」人會有這樣的懷疑，是因射影幾何的關係。站在鐵道上，出現在視平面上的鐵軌不呈兩平行線的樣子，而呈爲下圖所繪的



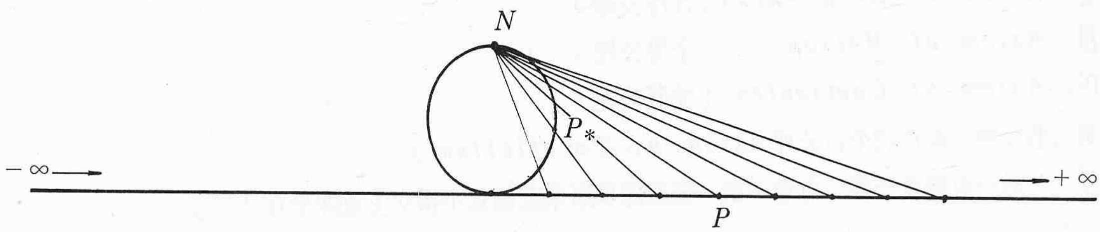
換句話說，地平面上的平行鐵軌ℓ_1，ℓ_2“射影”到視平面上π來的時候便成了$\ell_1{}^*$，$\ell_2{}^*$，它們幾乎交會在一點P_∞^*，這點P_∞^*便是視覺上的無窮遠點，因爲它對應於鐵軌向無窮遠方伸展後的「假想的交點」。

於是我們想起一種綴補無窮遠點進來的方法：起初作算術時，$+\infty$表示很大很大，$-\infty$表示很小很小（雖然絕對值也是很大很大），就像家財萬貫與負債纍纍的兩個人一樣是南弦北轍，但後來考慮到比例時，當兩數相除，分母由很小的正數過渡O到負數那頭時，商便從$+\infty$躍到$-\infty$。例如$\tan x$或一些有理函數的函數值，常一邊趨於$+\infty$，另一邊又從$-\infty$跑出來。這值得我們想到一個人爲的方法，把$+\infty$與$-\infty$接起頭來，換句話說，好好的一條直線當$+\infty$與$-\infty$接在一起，我們好像看到了它走向無窮遠又繞着圈子從負無窮遠回來了。



$y=\tan x$的圖形

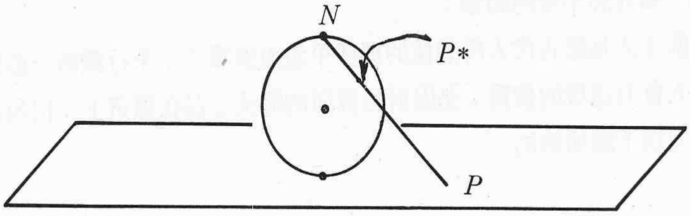
於是我們假想用圓來“代表”直線，代表的方式是：



在圖中，任意直線上的一點P，以圓上的P_*來“代表”，這樣直線上所有的點都在圓上有一個“代表”P_*，而圓上除了北極N點以外，每一點也都正好“代表”了直線上的一點。注意當P趨於$+\infty$時，它的代表P_*則趨於N點，而當P_*繞過N點，其在直線上所代表的點，則又自$-\infty$處回來。於是我們將N看作無窮遠點∞（$=+\infty=-\infty$）

我們很自然的將這種想法推廣於平面上來，爲了要補進無窮遠點，先試着模仿上述的情形考慮以“球面來代表平面”，然後再問這樣通不通？

考慮所謂的Stereographic射影：



仍以球面上的P_*點來代表平面上的P點，而以北極N來代表無窮遠點，用這樣的方式，我們補進了無窮遠點，可是這樣的補法通不通呢？

談「通不通」是相對的。要看基於那種觀點。從「拓蹼」（*Topology*）的觀點，這種補法當然是通的，（事實上它就是所謂的 *one-point compactification*）。從「保角幾何」（*Conformal Geometry*）的觀點，這種補法也是通的（注意在將 P 對應 P_* 的對應下，平面與球面竟然是保角的！）。但是從「射影幾何」的觀點來說，這樣的補法，却是不通的。

要把這些說清楚我們須回到一個老問題：

「什麼叫幾何（*Geometry*）？」

§2

在1872年，Klein在*University of Erlangen* 的一個演講中，提出了著名的*Erlangen Program*。對所謂幾何作了界說，他作這番界說是基於十九世紀以來各種不同的幾何紛紛出現，但彼此之間的比較意義却常含糊。

1822年，Poncelet 承繼自十七世紀以來 Desargues, Pascal, Monge, L. Carnot 及 Brianchon 的成果，把射影幾何以解析方法代替綜合法，作較有系統的處理，建立了射影幾何的輪廓。而1829－33年間 Lobatchevsky 與 Bolyai 分別發表了非歐幾何的基礎。隨後 Riemann（1854）爲正常曲率的橢圓幾何找到了球面的模型。1868 Beltrami 則替負常曲率的雙曲幾何建立在Pseudosphere 的模型上。各支幾何分門林立，人類對各支幾何的認識越來越豐富了，但幾何的基本特徵是什麼？

Klein 的界說是「各支幾何都是要研究空間（space）〔註〕在某特定運動群（*group of transformations*）下的種種不變性或不變量（*invariants*）」。比如說歐氏幾何是要研究平面（或高維空間）在剛性運動群之下的不變性（量），例如長度，角度，面積等等，列個表來說明各種不同幾何的內涵與關係。

就考慮二維的情形：

	Space ×	*Group of Transformations G*	*Invariants*
⑴歐氏幾何 (*Euclidean Geometry*)	平面（R^2）,	$G_o \equiv \{$*rigid motions of* $R^2\}$,	長度，角度，面積，線性（共點性及共線三點的分比）關聯（*incidence*）交比（*cross ratio*）。
⑵仿射幾何 (*Affine Geometry*)	,	$G_a \equiv \left\{\begin{matrix}\textit{affine transformations}\\ \textit{of } R^2\end{matrix}\right\}$,	線性關聯，交比。
⑶射影幾何 (*Projective Geometry*)	$R^2 \cup \{$無窮遠點$\}$	$G_p \equiv \{\quad ? \quad\}$,	關聯，交比。

注意1：表中的仿射變換（*affine transformation*）指的是 *linear transformation* + *translation*。如果考慮仿射幾何（*affine geometry*），那麼談長度，談角度，談面積，都變成沒有意義的事，因爲長度，角度，面積在仿射變換下都會改變，都不再是不變量了。不過共線三點經仿射變換之後仍然是共線。（因此關聯性（*incidence*）是不變性）。同時注意這三點間的兩距離雖然變了，但不管是什麼仿射變換，共線三點間距離的分比（$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$）却始終不變，所以說共線三點間距離的分比是不變量，後者與關聯性合在一起，事實上就是所謂的"線性"（*linearity*）。所以合

〔註〕這裡雖用*Space*（空間）這個字，但不特指三維空間，爲言語上的方便，我們用它來指要討論的幾何的對象，這對象可以是一直線，平面，甚或是高維空間，或其他更古怪的對象。

併起來說：「線性是仿射變換下的不變性」。

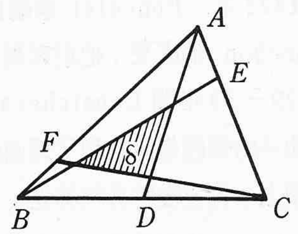
注意 2 ：通常，當運動群在增大（例如由G_0擴張到G_a），則不變性（或量）相應地在減少。

注意 3 ：我們常將所選的運動群，當作該種幾何的結構（*structure*）正如在代數對象（如群，環，體）上，把集合上的運算當作該代數對象上的結構一樣，有了空間（*Space*），沒有給定運動群，便還不成為幾何，給了某運動群之後，要討論的不變性（或量）的範圍確定了，幾何的結構便清楚了。這便是Klein的*Erlangen Program*的意思。

注意 4 ：對於射影幾何，我們的「空間」（*Space*）是平面加上一些無窮遠點，但它的結構是什麼呢？這個代表其結構的運動群又怎樣以最簡潔的方式表示出來？這便是以下要談的問題。

§ 3

用Klein的*Erlanger Program*的觀點來說，考慮射影幾何，就是要討論射影變換下的不變性，這個觀點的意思，我們不妨再用個例子加以說明，今年大專聯考有個題目說「在$\triangle ABC$三邊BC，CA及AB上分別取點D，E，F，使$\overline{BD}=\overline{DC}$，$\overline{CE}=2\overline{EA}$，$\overline{AF}=3\overline{FB}$，設三直線$AD$，$BE$，$CF$所圍成的三角形面積為$\delta$，而$\triangle ABC$的面積為$\triangle$，求$\delta:\triangle=?$」

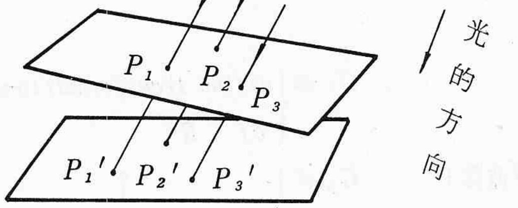


如果做的時候，取座標$B=(0,0)$，$C=(a,0)$，$A=(b,c)$表示A，B，C處於一般的相關位置，計算會變得十分繁複，但若用心想想題目中所牽涉的條件只是共線三點的分比及面積間的比例，這些是不因線性變換（或進一步說，仿射變換）而變，故可以考慮特殊的情況：即$B=(0,0)$，$C=(1,0)$，$A=(0,1)$的情形（或為更簡化計算，考慮$B=(-1,0)$，$C=(1,0)$，$A=(0,1)$），據此特殊情況算出來的$\delta:\triangle$不因作線性變換而異，從而歸結得一般情況下的答案。

這個例子說明了利用Klein的觀點：「$\delta:\triangle$是仿射變換下的不變性」我便可節省計算上的麻煩。

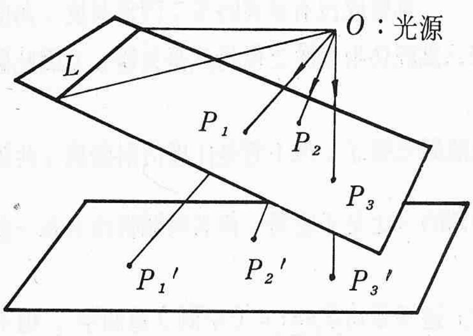
今天我們要談的是射影變換，它比仿射變換更加廣義。像上述$\delta:\triangle$的問題是仿射問題，但不再是射影問題，因為在射影變換下，分比與面積比例都變掉了。

到底什麼是「射影變換」呢？把兩平面作平行光的射影：



所得的還只是仿射變換的特殊情況。（仿射變換＝線性變換＋平移，此類平行投影所相應的仿射變換，其線性變換的部份有一固有值為1。　請注意兩平面交線！）

如果更進一步，對兩平面作光源射影：

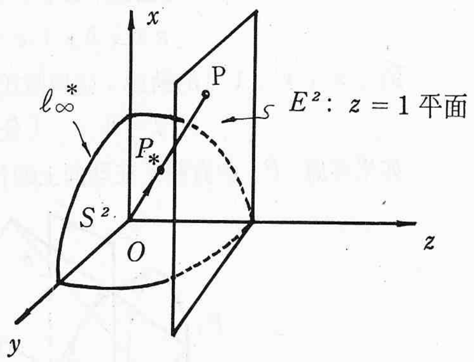


則很多性質（例如共線三點間的分比）都改變了。射影變換便是一連串的平行光或光源射影的組合。注意

光源射影並不能對每一點都作確定的投射，比如說圖中L線上的點經O投射出去無法在另一平面上落實，只好說L線投射到所謂的「無窮遠線」上去。

射影變換基本上便是一連串的平行光或光源射影的組合。為討論方便，若將光源移到無限遠，便得平行光射影，因此平行光射影可以當作光源射影的特別情況。但這樣射影變換要處理起來相當複雜。從十七世紀以來，Desargues, Pascal, Monge 相繼做了一些工作，這些工作大體可以稱為綜合射影幾何，到了十九世紀初Larzarcarnot, Brianchon, Poncelet 之後 有了解析方法，處理起來才較容易，這段方法上的沿革，就像從平面綜合幾何進展到解析幾何一樣，是方法上的一大進步。今天我們為了讓討論本身較容易掌握，採取了解析方法。而解析方法的基礎便是引入座標，界說其運動群。

把歐氏平面 E^2 插到 $R^3 \equiv \{ x, y, z \}; x, y, z$ 皆為實數 } 中，插入的方式是使 E^2 成為 $z=1$ 所代表的平面，所謂"射影平面"事實上是在 E^2 之外補進一些"無窮遠點"，這些無窮遠點的全體構成一條所謂的"無窮遠線 ℓ_∞"，換句話說，射影平面 P^2 便是 E^2 再補上 ℓ_∞。



但無窮遠線ℓ_∞應補在哪裡呢？取單位球S^2，以原點O為心，以1為半徑。把光源放在O處，於是P上每一點都是球面上某點P_*的投影，因此可暫時將 E^2 上的點P用球面上的點P_*來代表，這些歐氏平面的代表們正好充斥於東半球（即 $\{ (x, y, z) \in S^2 ; z > 0 \}$）。現在情況比較明朗了，當$P$往無窮遠跑的時候，它的代表點$P_*$則往子午線

$$\ell_\infty^* \equiv \{ (x, y, z) ; z = 0 \}$$

趨近，因此我們就將ℓ_∞^*充當無窮遠線的代表。

到目前為止，我們很人工的用東半球來「代表」歐氏平面，用子午線來「代表」無窮遠線，以下我們要做兩件事：㈠如果在球面上要做射影幾何，把球面的東半球加上子午線當做「射影平面」，視覺上還算清楚，但計算上就很大的困難，所以我們要引入所謂的「齊性座標」，把射影平面再加改造，使計算容易進行，且保持 E^2 原有的一些代數性質，例如 E^2 上的一條二次曲線，放到 P^2 上來是否仍然允當的稱它為二次曲線？㈡界說其上的運動群，使它仍易於拿來計算，並說明它正好是上面所說「射影變換」的全體。

對於射影平面上的點，若看 $E^2 = \{ (x, y, z) ; z = 1 \}$ 的點P無法涵蓋無窮遠點，若看球面上的代表P^*，雖可逼近無窮遠線，計算上却不方便且相當程度破壞了射影平面上的代數性質。於是我們乾脆這樣做：把順着OP射出的整條直線「視為」射影平面上的「一點」！這是怪異的想法，但却徹底解決了處理射影幾何的困難。

定義1：設等價類 $[x, y, z] \equiv \{ (\lambda x, \lambda y, \lambda z) ; \lambda$ 為實數且 $\lambda \neq 0 \}$，這裡x，y與z三實數不同時等於0，我們說這樣的 $[x, y, z]$ 的全體組成射影平面 P^2。以後「 P^2 上的一點α」指的便是這樣的等價類 $[x, y, z]$，常記成 $\alpha = \alpha [x, y, z]$。

注意㈠：由於等價類 $[x, y, z]$ 是自由度為1（亦即有一個參數λ）的直線（但扣除O點），所以 P^2 上的點雖然有三個座標x，y，z，實際上只剩兩個自由度。注意：$(6, -8, 2)$，$(3, -4, 1)$，$(1.5, -2, 0.5)$，$(-0.75, 1, 0.25)$……等等各點，現在都「黏」成了同一點$\alpha[6, -8, 2]$，（當然也可寫成$\alpha[3, -4, 1]$，$\alpha[1.5, -2, 0.5]$……），而不分彼此。

注意㈡：幾乎每一（除非$z=0$）等價類 $[x, y, z]$ 都與 E^2 交於一點$P(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$。因此這些

等價類便相當於 E^2 上原有的點，至於 $z=0$ 的情況，〔x，y，0〕便代表新增補的無窮遠線，所以說

$$E^2=\{〔x, y, z〕; x, y, z\in R \text{且} z\neq 0\}\subset P^2$$

而

$$\ell_\infty=\{〔x, y, 0〕; x, y\in R\}\subset P^2$$

定義 2：當一些等價類的聯集恰好是一個空間中的平面（但扣除 O 點），則稱這些等價類組成 P^2 中的一條直線，換句話說，滿足

$$ax+by+cz=0 \qquad \text{（一次齊次方程）}$$

的所有〔x，y，z〕（仍要求（x，y，z）$\neq$（0，0，0）），稱爲組成 P^2 中的直線。

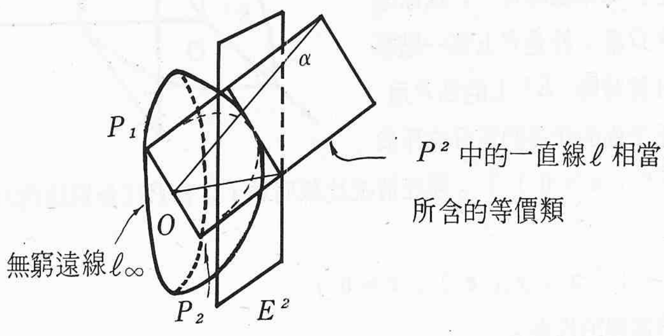
注意：設 ℓ 爲 P^2 中的一條直線，且 $\ell\neq\ell_\infty$ 則 ℓ 在 E^2 上的代表點正好是滿足

$$ax+by+c=0 \qquad \text{（取 } z=1 \text{ 即得）}$$

的（x，y，1）的軌跡，這與歐氏空間 E^2 中原來所謂的直線吻合。至於 ℓ_∞ 的方程式便是

$z=0$　（任一對"對頂的"兩端點 P_1、P_2 屬同一等價類，應視爲同一點）

如果考慮 P^2 中直線 ℓ 在球面上的代表點全體，則它構成大圓的半弧（兩端點等價，看成同一點）



定義 3：射影平面 P^2 上的運動群 G 便是以齊性座標〔x，y，z〕來表示射影平面上的點時，x，y，z 三變數的線性變換群，亦即

$$G=\{〔x, y, z〕\xrightarrow{f_A}〔x', y', z'〕;$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{A爲一個 3 階方陣}(a_{ij})\}$$

注意：當 $A=\begin{pmatrix} & & 0 \\ & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ 時，則 f_A 將 E^2 映至 E^2，且是 E^2 上的仿射變換群。

我們可以證明如下定理，來說明 G 限制在 E^2 時便是前述的射影變換（證明當做習題）。

定理：對任意 $f_A\in G$，

$$(x, y)\longrightarrow\left(\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z}, \frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z}\right)$$

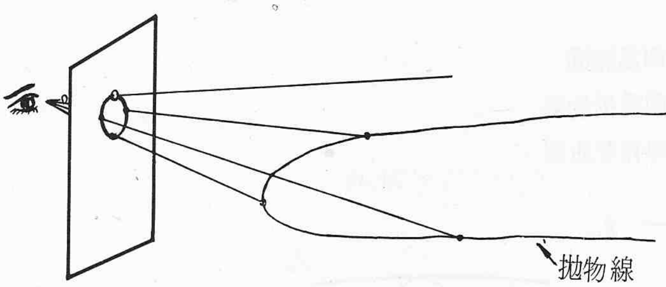
正是前述一連串光源射影的組合。

§ 4

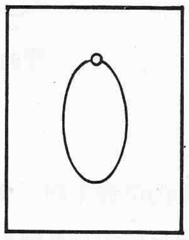
現在我們有了射影平面及其上的射影變換群，可以開始來答覆兩個老問題：

問題 A：（橢圓、拋物線與雙曲線的整合問題）

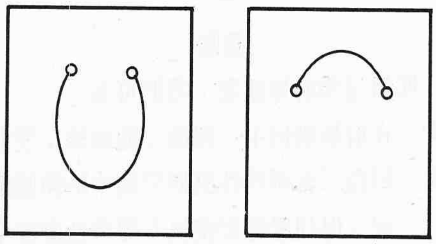
設若地平面（假定爲平坦而無限伸展）上有一拋物線，有人站着對它拍照，會發覺照片上出現的是一個漏了上端一點的橢圓。如果地平面上畫的是雙曲線的話，假定這人站在雙曲線兩葉之間，沿雙曲線軸朝其中一葉，拍下來得到的照片會是橢圓的一部份，今反身再朝另外一葉拍照，又得橢圓的另一部份，兩部



份接合一起，會發覺除漏掉黏接處的兩點外，竟合成好端端的一個橢圓。



看拋物線，拍下來的照片，其上是只漏一點的橢圓。



看雙曲線，朝相異兩方向各拍下來的照片，兩張合起來正好是一個漏掉兩點的橢圓。

問：用射影幾何怎麼來解釋，這一巧合的現象？

現在我們來答覆這個問題，對於歐氏平面 E^2 上的一條二次曲線（假定為非特異的情況，例如不流為兩相交直線，平行直線，甚或虛解等等）：

$$\Gamma : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

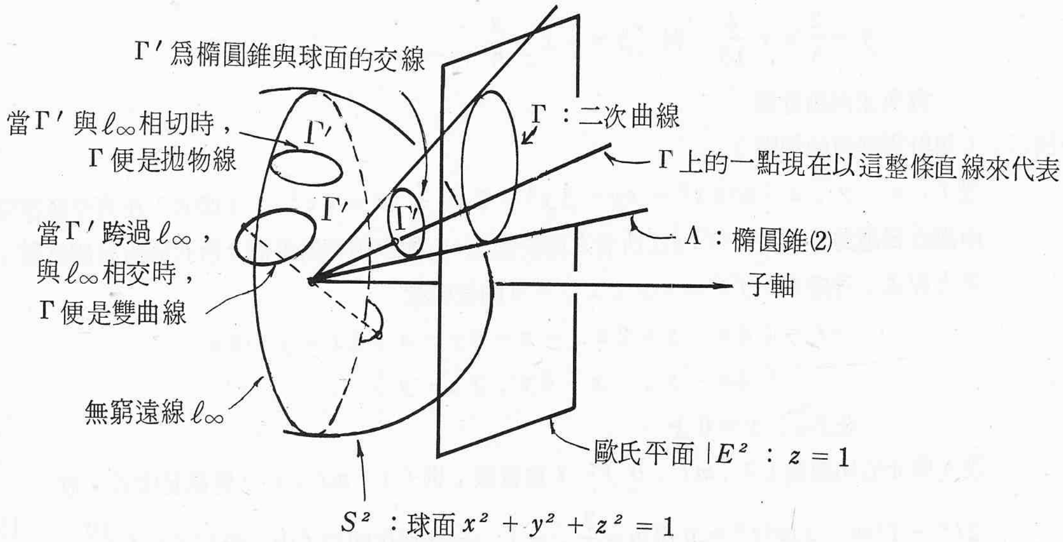
把它放到射影平面，它應變成

$$\Lambda : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

P^2 中所決定的點集，這裡〔x，y，z〕表示 P^2 中的齊性座標。（為什麼？請回想 E^2 正好是 $z=1$ 的平面）。但(2)式在齊性座標空間中代表橢圓錐鉗頂在原點，此因適當變換座標，可將(2)式化成

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \lambda_3\bar{z}^2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

其中 λ_1，$\lambda_2 > 0$，$\lambda_3 < 0$（不然便屬特異）。而(3)式所代表的顯然是個橢圓錐（自己想想）。因此(2)式在齊性座標空間中便如下圖所示：



注意橢圓錐 Λ 與 $z=1$ 平面相交於 Γ，而與球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相交處記為 Γ'。

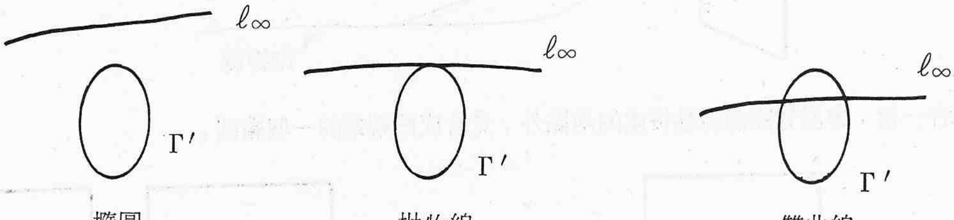
$$\Gamma = \Lambda \cap E^2 ,\quad \Gamma' \equiv \Lambda \cap S^2$$

從Γ'的位置來看Γ

(1) Γ'與ℓ_∞相離時，Γ即爲橢圓

(2) Γ'與ℓ_∞相切時，Γ即爲拋物線

(3) Γ'與ℓ_∞相交時，Γ即爲雙曲線



橢圓　　　　拋物線　　　　雙曲線

採用這種射影觀點，我們可有

定理：在射影幾何中，橢圓，拋物線，雙曲線，事實上都無分軒輊。

解說：因爲三者都齊性座標空間中的橢圓錐（Λ）來代表，只是橢圓錐的位置不同，才造成三種不同的情況，但利用射影變換（即齊性座標空間中的線性變換），可將三種情況相互轉化，故以射影變換爲運動群的射影幾何中，三者相互之間沒有區別。

於是我們答覆了問題A的拍照現象，照片上遺漏的一點（或兩點），正是拋物線（或雙曲線）與無窮遠線ℓ_∞的切點（或兩交點）。

用這種觀點，我們也能分享計算上的好處，舉個例子：

〔例〕求$2x^2-xy-3y^2+2x-y+4=0$的漸近線

作法一：（通常用平行直線族的求法）

以$y=mx_n+k_n$代入原式，集項得

$$(2-m-3m^2)x_n^2+(-k_n-6mk_n+2-m)x_n+(-3k_n^2-k_n+4)=0$$

兩端除以x_n^2，因 $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$　故

$$2-m-3m^2=0\text{，得}m=\frac{2}{3},\ -1\text{，}$$

又僅除以x_n^2，亦得$-k-6mk+2-m=0$，得$k=\dfrac{4}{15},-\dfrac{3}{5}$，故

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{15}\quad\text{與}\quad y=-x-\frac{3}{5}$$

爲所求兩漸近線

作法二：（用射影幾何的觀點）

設$f(x,y,z)\equiv 2x^2-xy-3y^2+2xz-yz+4z^2$，〔(2)式〕在齊性座標空間中，兩漸近線應爲分別在$\Gamma'\cap\ell_\infty$所含之兩交點上，與Λ相切的平面π所代表的射線直線，要求出這方程式，考慮Λ：$f(x,y,z)=0$的法向量

$$\nabla f=(4x-y+2z,\ -x-6y-z,\ 2x-y+8z)$$

$$(4x-y,\ -x-6y,\ 2x-y)$$

在ℓ_∞：$y=0$上

設Λ與π的切線爲$(t,mt,0)$：t爲實數，則$(t,mt,0)$應滿足(2)式，故

$2t^2-t^2m-3m^2t^2=0$得$m=\dfrac{2}{3},-1$，今分別代回∇f中，得$\nabla f=\left(\dfrac{10}{3},-\dfrac{15}{3},\dfrac{4}{3}\right)$，$(5,5,3)$　故　π爲$10x-15y+4z=0$　或　$5x+5y+3z=0$

其在 E^2 上相應的直線便是（代以 $z=1$）

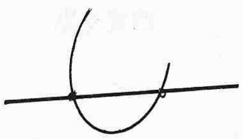
$$10x-15y+4=0 \quad \text{或} \quad 5x+5y+3=0$$

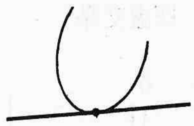
即 $$2x-3y+\frac{4}{5}=0 \quad \text{與} \quad x+y+\frac{3}{5}=0$$

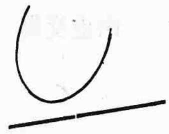
爲所求兩漸近線

最後我們再提一下交點問題：

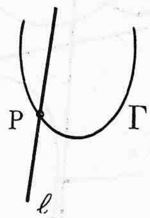
問題 B：在歐氏平面上，考慮一條直線（滿足一次方程）與一條拋物線（滿足二次方程），從代數着眼，如果把重數（*multiplicity*）計算在內，應有兩個交點（不管實交點或虛交點），如圖：


(1)兩實交點


(2)一實交點（但重數爲 2）


(3)兩虛交點

但事實上，會出現這種狀況：



(4)只有一實交點

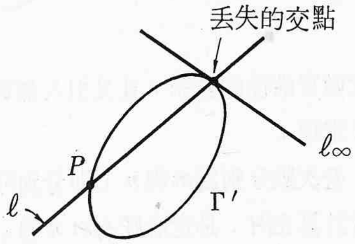
所丟失的交點掉到哪裡去？

通常交點丟失的原因，是實數系本身並非「代數完備」（*algebraically closed*）。也就是解實係數的代數方程不一定總有實根，例如：求 $y=x^2+3$ 與 $y=1$ 的公解，相當於求

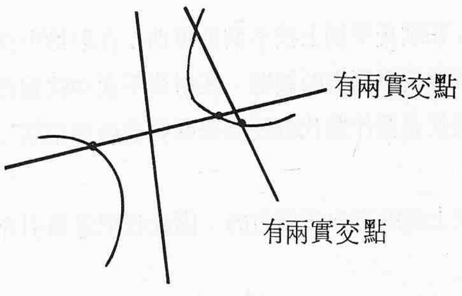
$$x^2+3=1$$

的根，但它沒有實根，却仍有虛根 $\pm\sqrt{2}\,i$，所以雖然沒有實交點，我們仍說它有虛交點：$(\sqrt{2}\,i\,,1)$ 與 $(-\sqrt{2}\,i\,,1)$，這便是上圖(3)中的情況。

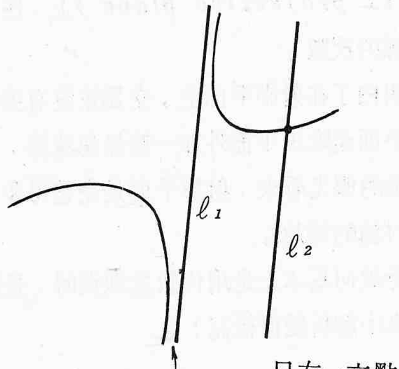
但(4)却道道地地只有一個實交點，另外一個交點丟在什麼地方（顯然不會又是虛交點，因虛根總是成對存在的，不會只有一個虛交點）？現在有了射影平面，我們發覺另一實交點，事實上在無窮遠線上：



同樣，考慮直線與雙曲線：

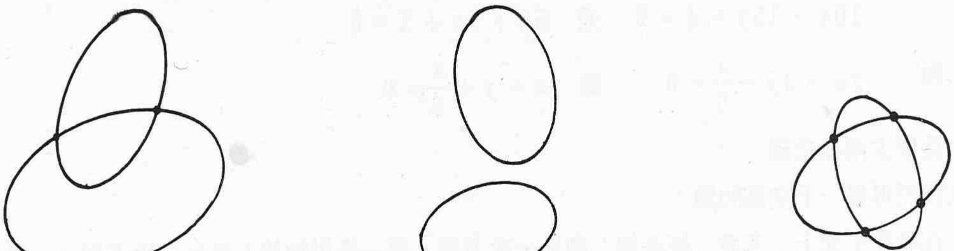


(5)



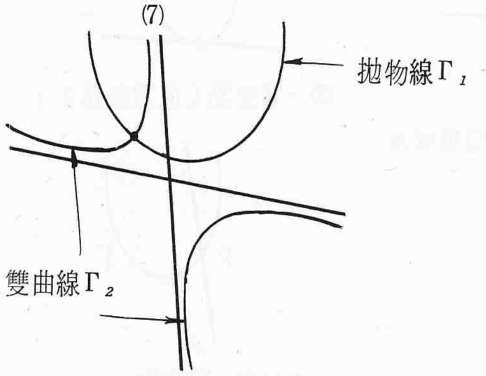
(6)

或二次曲線與二次曲線



兩實交點 兩虛交點　　四虛交點　　四實交點

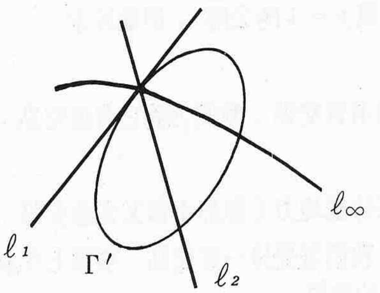
(7)



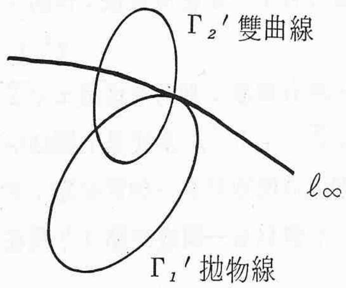
只有一實交點

(8)

在(6)與(8)中，所丟失的交點都掉在無窮遠處：



(6)′



(8)′

如果考慮的數系是像複數系那麼有代數實備性的數系，且又引入無窮遠點的話，那麼上述的討論可以得到完整的推廣，這便是著名的*Bezout*定理：

定理：在射影平面上，任兩條代數曲線，若次數分別爲m與n（即分別可表爲m次與n次方程的解），其相交交點個數如果重數與實、虛皆計算在內，必定恰好有mn個。換句話說，在複數射影平面（*complex projective plane*）上，任兩代數曲線恰好有mn個交點，其中m，n分別爲兩條代數曲線的次數。

於是我們明白了在射影平面上，交點並沒有丟失。在歐氏平面上找不到的東西，在射影平面中找回來了，只因射影平面是歐氏平面外加一條無窮遠線，很多歐氏平面上的缺憾，在射影平面中就彌補過來了。從代數方程式論的眼光看來，射影平面是完整得多。這就是爲什麼代數幾何學都要在射影空間（尤其是複射影空間）中討論的緣故。

高中的解析幾何基本上是用代數處理幾何，是沿依上述的方向在進行的，因此我把這篇引介射影幾何的稿子稱做「高中解析幾何後記」。