簡易線性代數(一)

向量與矩陣的運算

賴 漢 卿　　清華大學數學系

前　　言

本文是爲初學線性代數的讀者而寫。不論高中生，大學理工農商各科學生，如欲自修線性代數，都能輕易地從文中獲得其所需要的知識，與實用的技巧，進而踏進線性分析的領域。

在今日資訊科學化時代，隨著電算科學的普及，數學在社會各方面，不但不能缺少，而且日趨重要，這是衆所皆知的事實。

隨著近廿年來，工業生產的迅速，人們生活間之關係的複雜，人們乃迫切地需要有一種科學方法，以安排、解決其行爲發生的過程，乃屬數學的問題，因此數學的領域也就隨著需要逐漸地擴大了。從古時候，數字的加減乘除，到今天向量、矩陣的運算；以及從自然科學、工程學所基於發展的理論數學，到今天的社會、經濟、經營管理，生產決策所要求之科學方法，也是一種數學的方法。數學的適用範圍逐日擴大，其思考方法是多采多姿的。線性代數在上述各方面扮演著最基本而重要的角色；如規畫問題，最佳化策略等。又線性代數是以向量、矩陣、行列式與連立方程式爲主要道具，藉以擴展到線性分析的理論，因此我們就從向量，矩陣開始講。

1. 向量與矩陣之運算

1－1　向量的運算

我們先來看一種多維的量。設某人買A、B兩種罐頭，A種罐頭的重量、體積、價格以$\boldsymbol{a}$表示；B種罐頭的各量以$\boldsymbol{b}$表示，於是$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$就表示$A$及$B$兩種罐頭所含各種量的和。如果將這兩種罐頭所含之各量列成下表

	A	B
重　量	200 g	300 g
體　積	150 cm^3	400 cm^3
價　格	100元	150元

$\downarrow$ $\boldsymbol{a}$　　$\downarrow$ $\boldsymbol{b}$

則此兩種罐頭的重量和爲　500 g

體積和爲　550 cm^3

價格和爲　250 元，

即當多維量以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示時，

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}200\ g\\150\ cm^3\\100\text{元}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}300\ g\\400\ cm^3\\150\text{元}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$就表示

$$\begin{pmatrix}200\ g\\150\ cm^3\\100\text{元}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}300\ g\\400\ cm^3\\150\text{元}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\ g+300\ g\\150\ cm^3+400\ cm^3\\100\text{元}+150\text{元}\end{pmatrix}$$

也就是說

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}500\ g\\550\ cm^3\\250\text{元}\end{pmatrix}$$

這種記法或算，是將數種量一次的表示出來，稱爲多維的量。

量的大小一般是用數來表示。關於多維量，若用一般表示數的形式來表出時，其計算也就如同數的計算一樣。由量抽象化爲數，使在計算當中，量的單位不予考慮，僅考慮其一般性的算法，則方便得多了。如上述兩種罐頭之例子，棄去其量的單位，可寫作

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}200\\150\\100\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}300\\400\\150\end{pmatrix}$$

這種符號之表示就稱爲向量。向量通常以粗體字母表示，構成向量之各數（可以爲複數），稱爲向量的分量、成分或元素（若以複數爲元素之向量，也稱爲複數的向量）。一般在向量的各元素下標足碼，寫成

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$$

爲了分別此兩種形式的向量，有時將前者稱做行向量，後者稱做列向量，如若$\boldsymbol{a}$表行（列）向量，則列（行）向量就稱爲$\boldsymbol{a}$的轉置（意思是由縱式轉變成橫式的表示），而以$\boldsymbol{a}^t$表示$\boldsymbol{a}$的轉置，其中t是*transpose*（即轉置）的第一個字母。在向量表示法中，構成向量之成分的個數n，稱爲向量的維度（*dimension*）。如上面罐頭的例子，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$都是3維向量。

兩個不同維度的向量是無從比較的，但維度相同之兩向量：

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,\cdots\cdots,b_n)$$

稱爲相等，記作　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，　意思是各對應的元素相等，即　$a_1=b_1$，　$a_2=b_2$，……，$a_n=b_n$。

關於向量之相等關係，有下列三種法則：

1. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$　（反射律）
2. 若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，則$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，　（對稱律）
3. 若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，則$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$　（遞等律或推移律）

關於向量的運算法則，如前例罐頭之各量之和，可如下定義：

設$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots\cdots,b_n)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots\cdots,c_n)$　則

⑴加法：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\cdots\cdots,a_n+b_n)$$

(2)純量乘法：λ 爲任意的數，

$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots\cdots, \lambda a_n)$$，表示 $\boldsymbol{a}$ 的 λ 倍。

又由(1)，(2)可得有關純量積的分配法則

(3)分配律：　ℓ，m爲任意常數

$$(\ell + m)\boldsymbol{a} = \ell \boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}$$

$$\ell(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \ell \boldsymbol{a} + \ell \boldsymbol{b}$$

在(2)中若 $\lambda = -1$，則

(4)　$-\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2, \cdots\cdots, -a_n)$

因之由(1)，(2)可得兩向量之差爲

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots\cdots, a_n - b_n)$$

從數的運算法則，如交換律、結合律，可以直接導出在向量中，對加法有

(5)　交換律：$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

(6)　結合律：$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

由上式性質知　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$。

兩向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 若相等，則　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 之各分量爲0，此時之向量稱爲零向量，且寫作

$$\boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots\cdots, 0)$$

對於 $\boldsymbol{0}$ 向量，有如數的0一樣的特性，即

(7)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a}$，

$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

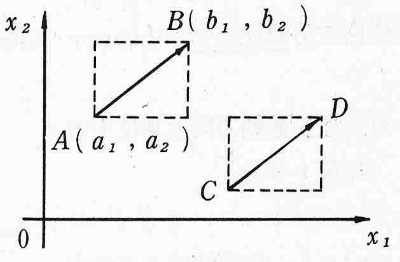
若給 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 兩向量，滿足方程式

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

則 $\boldsymbol{x}$ 僅有一解爲　$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = (b_1 - a_1, \cdots\cdots, b_n - a_n)$

1－2　向量的幾何意義，內積

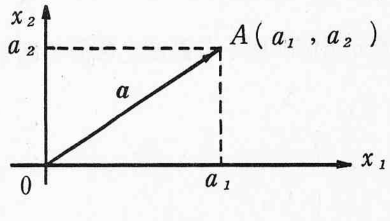
在坐標平面上兩點　$A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$　連成一有向線段 $\overrightarrow{AB}$，其起點爲 A，終點爲 B。若考慮過 A 與坐標軸平行的直線，做爲附隨 $\overrightarrow{AB}$ 之坐標軸，那麼此有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 的終點（新）坐標就



變成爲

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

故此有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 也可表示一向量。這種表示，若與 $\overrightarrow{AB}$ 平行且相等的有向線段 $\overrightarrow{CD}$，則因其分量相等，所以表示相等的向量。反之一個2維向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$，可用許多平行且相等的有向線段表示出來。通常都如下圖，用原點爲始點之有向線段 $\overrightarrow{OA}$，來表示向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$。

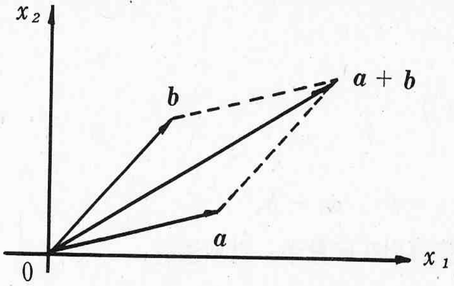


此時點A的坐標爲(a_1，a_2)，像這樣以點坐標表示向量時，此向量$\overrightarrow{OA}$稱爲位置向量(*position vector*)。

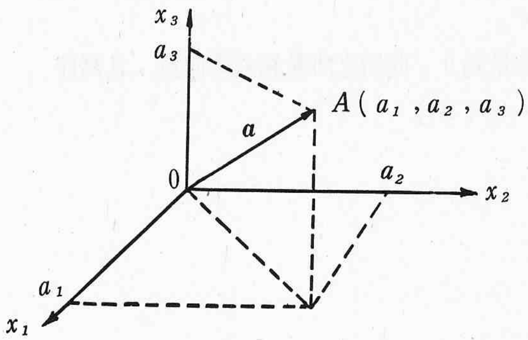
兩向量　$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，　$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$之和

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$$

在圖形上是很容易看出來爲，以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$爲邊之平行四邊形的對角線：



三維向量$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$也如同二維向量一樣，在空間由原點$O$與點$A$($a_1$，$a_2$，$a_3$)所連之有向線段$\overrightarrow{OA}$表示出來，如下圖



要是在x_1，x_2，x_3坐標軸上，分別取單位向量

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$$

則分別與純量a_1，a_2，a_3乘積之和爲

$$a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3=(a_1, 0, 0)+(0, a_2, 0)+(0, 0, a_3)=(a_1, a_2, a_3)$$

因此我們知道，任何3維向量都可用各坐標軸之單位向量的純量倍之和來表示出來。

一般以數個向量的純量倍之和所表示的向量，稱爲這些向量的線性結合(*linear combination*)。

對於n維向量　$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$而言，可在各坐標軸方向取單位向量：

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, \cdots\cdots, 0), \cdots\cdots, \boldsymbol{e}_i=(0, \cdots\cdots, \overset{\text{第 } i \text{ 分量}}{1}, 0, \cdots\cdots 0), \cdots\cdots, \boldsymbol{e}_n=(0, \cdots\cdots, 0, 1)$$

，以$\boldsymbol{a}$之各分量a_i乘$\boldsymbol{e}_i$($i=1, 2, \cdots\cdots, n$)，作線性結合表示成

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$$

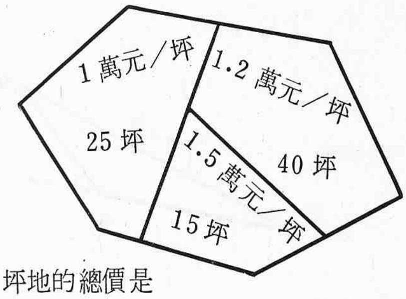
這種表示法是唯一的，因若有

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

則比較兩邊之第i個分量得　$x_i=a_i$($i=1, 2, \cdots\cdots, n$)，故也。

爲了說明二向量之內積，我們先看下例：

土地價格是隨地區而不同，如下圖有80　坪之土地，但分三個區域，各區域之單價不同(如圖示)，



某人欲買此80坪地的總價是

1（萬元／坪）× 25（坪）+ 1.5（萬元／坪）× 15（坪）+ 1.2（萬元／坪）× 40（坪）

= 95.5（萬元）

這個計算若考慮用向量來表示各區間的價格與坪數時爲

$\mathbf{p} = (1, 1.5, 1.2)$，　$\mathbf{a} = (25, 15, 40)$

要是$\mathbf{p}$與$\mathbf{a}$都是純量，則其總價格應是$\mathbf{p}$與$\mathbf{a}$之乘積，寫作　$(\mathbf{p}, \mathbf{a})$或$\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}$，但在今之向量的情形，這個乘積是

$$(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = (1, 1.5, 1.2)\begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \times 25 + 1.5 \times 15 + 1.2 \times 40$$

$$= 95.5$$

像這種向量之對應分量作乘積後再相加，所得的數，稱爲此兩向量的內積（*inner product*）。

對一般n維之兩向量

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$$

的內積定義爲

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots\cdots + a_n\overline{b_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}$，$i = 1$，其中$b_i$表示$b_i$的共軛複數，若向量的各成分是實數，則　$\overline{b_i} = b_i$。

關於向量內積有下列性質，是從定義易於導出來的結果

(1)　$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$

(2)　$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} = 0$

(3)　$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$，　λ爲任意純量數

(4)　$\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$

(5)　$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$

　　$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$

特別由(1)，(2)，我們定義向量$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$的長爲

$$\| \mathbf{a} \| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots\cdots + a_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

關於向量的長有下列性質：

(1)　$\|\mathbf{a}\| \geq 0$

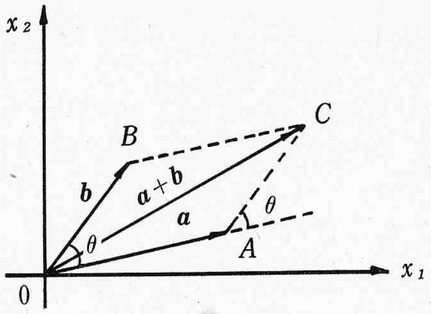
(2)　$\|\mathbf{a}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} = 0$，

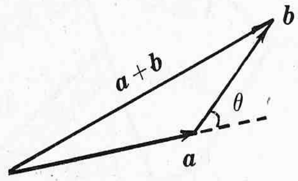
(3)　$\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{a}\|$

(4)　$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$　　（*Schwarz*不等式）

(5)　$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$　　（三角性不等式）

對於$\| \ \|$之性質(1)，(2)，(3)都是顯然的結果。(4)，(5)由2維向量之情形，也易於把握此不等式的成立，我們就特別情形，在2維向量$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$，$\mathbf{b} = (b_1, b_2)$來說明：設$\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$間之夾角爲$\theta$（如





下圖)，則由餘弦定理，對於△OAC而言，

$$\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2-2\|a\|\,\|b\|\cos(\pi-\theta)$$

但 $\|a+b\|^2=(a+b,\ a+b)$

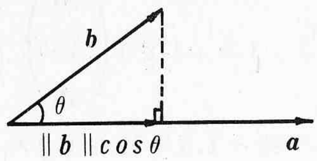
$$=(a+b,\ a)+(a+b,\ b)$$

$$=\|a\|^2+(b,\ a)+(a,\ b)+\|b\|^2$$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，　$(b,\ a)=\overline{(a,\ b)}$，

故　$2Re(a,\ b)=2\|a\|\,\|b\|\cos\theta$，$Re\,\alpha$表一複數$\alpha$的實部；因此

$$\cos\theta=\frac{Re(a,\ b)}{\|a\|\,\|b\|}$$



但$-1\leq\cos\theta\leq1$，故

$$|(a,\ b)|\leq\|a\|\,\|b\|,$$

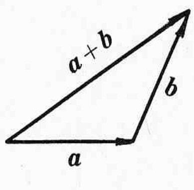
即性質(4)，在一般實數元素的向量時，$Schwarz$不等式就是：$(a_1b_1+\cdots\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+\cdots\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+\cdots\cdots+b_n^2)$

特別若 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，則a與b垂直，即　$a\perp b\Longleftrightarrow(a,\ b)=0$，

又若$(a,\ b)$爲實數，則　$(a,\ b)=\|a\|\,\|b\|\cos\theta$

即內積表示a的長$\|a\|$與b在a上之正射影的大小，$\|b\|\cos\theta$之積，此與b的長$\|b\|$與a在b上之正射影的大小$\|a\|\cos\theta$之積相同。

(5)的性質由一三角形的兩邊和大於第三邊即知道了：



1－3　矩　陣

如§1－1開頭所舉的例子，我們考慮規格不同的兩種罐頭A，B時，各量以向量表示成

$$a=\begin{pmatrix}200\\150\\100\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}300\\400\\150\end{pmatrix}$$

又如果其重量、體積、價格分別記成列向量，且寫作：

$$w=(200,\ 300),\ v=(150,\ 400),\ p=(100,\ 150)$$

合併一起考慮時，就表示成

$$M=[a\quad b]=\begin{bmatrix}200&300\\150&400\\100&150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w\\v\\p\end{bmatrix}$$

這種M稱爲矩陣（ matrix ），矩陣之縱橫分別稱爲行向量及列向量，由上而下之順序稱爲第一列，第二列，……，由左而右之順序稱爲第一行，第二行，……，構成矩陣之數稱爲記數（ entry ）或元素（ element ）。矩陣通常以英文的大寫字母表示。今以A表矩陣，其元素以a_{ij} 表示，即第i列第j行所對的元素。如a_{23} 即表示矩陣A之第 2 列第 3 行的元素。一般有m列，n行之矩陣，A就寫成

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}，簡記作 A=(\ a_{ij}\ )_{m\times n}$$

當矩陣之行、列個數相等時，即$m=n$時，稱爲方陣（ sguare matrix ）。m維行向量可視同爲$1\times m$矩陣，n維列向量可視同爲$n\times 1$矩陣。

矩陣是由向量擴張而來，仍表示多維之量，所以其相等關係，演算方法與向量的情形類似。如兩矩陣$A=(\ a_{ij}\ )_{m\times n}$ ，$B=(\ b_{ij}\ )_{m\times n}$ 相等，意思是在行、列個數分別相等時，其對應元素也相等，即

$a_{ij}=b_{ij}$ ，$i=1$ ，2 ，……，m ，$j=1$ ，2 ，……，n

此時相等的兩矩陣就寫作 $A=B$

一個$m\times n$ 矩陣包含有mn個元素。矩陣之相等關係有下列性質：

⑴ $A=A$ （反射律）

⑵若$A=B$，則$B=A$ （對稱律）

⑶若$A=B$ ，$B=C$ ，則$A=C$ （遞等律或推移律）

爲了矩陣要能像向量那樣運算，我們需有下面一些擴張的定義。

1－4 矩陣的演算

給與矩陣

$$A=(\ a_{ij}\ )_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B=(\ b_{ij}\ )_{p\times g}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots b_{1g} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots b_{2g} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{p1} & b_{p2} \cdots\cdots b_{pg} \end{pmatrix},\quad C=(\ c_{ij}\ )_{l\times k}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots\cdots c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} \cdots\cdots c_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{l1} & c_{l2} \cdots\cdots c_{lk} \end{pmatrix}.$$

先設$m=p=l$ ，$n=g=k$ ，即A、B、C表同型的矩陣時，定義

⑴ 加法：

$$A+B=(\ a_{ij}+b_{ij}\ )_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \cdots\cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \cdots\cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \cdots\cdots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

⑵ 乘一純量數λ：

$\lambda A=(\ \lambda a_{ij}\ )$，即$A$的各元素乘$\lambda$。

若$\lambda=-1$時，$-A=(\ -a_{ij}\ )_{m\times n}$ 因此由⑴可定義

⑶ $A-B=(\ a_{ij}-b_{ij}\ )_{m\times n}$

利用數之交換與結合法則，易知

⑷ $A+B=B+A$

(5) $(A+B)+C=A+(B+C)$

又矩陣之各元素爲 0 時，稱爲零矩陣，仍以 0 表示，則

(6) $A=B \Longleftrightarrow A-B=0$

$A+0=A=0+A$，$0+0=0$，

對於任意矩陣 A 若滿足方程式

$$A+X=0$$

其解是唯一確定的，即 $X=-A$。又由(1)，(2) 對於矩陣的純量倍是滿足

(7) $\ell(kA)=(\ell k)A$ （結合律）

$(\ell+m)A=\ell A+mA$ （分配律）

$\ell(A+B)=\ell A+\ell B$ （分配律）

爲引入矩陣的乘法，先看 § 1－1 之兩種規格之罐頭爲例，今設有王一，林二，張三，李四等 4 人買了 A、B 兩種罐頭之情形如下：

	A	B
重　量	200 g	300 g
體　積	150 cm^3	400 cm^3
價　格	100 元	150 元

	王一	林二	張三	李四
A	3	1	5	8
B	2	4	7	6

兩個表分別以矩陣表示，則爲

$$P=\begin{pmatrix} 200 & 300 \\ 150 & 400 \\ 100 & 150 \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

於是就個人所有之總重量、體積、價格皆可列成下表：

	王　一	林　二	張　三	李　四
重　量	1200	1400	3100	3400
體　積	1250	1750	3550	3600
價　格	600	700	1550	1700

表中各量是依下列之計算而得；即依王一，林二，張三，李四之順序記出

重量：$\begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=200\times 3+300\times 2=1200\ (g)$

$\begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=200\times 1+300\times 4=1400\ (g)$

$\begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}=200\times 5+300\times 7=3100\ (g)$

$\begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}=200\times 8+300\times 6=3400\ (g)$

體積：$\begin{pmatrix} 150 & 400 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=1250\ (cm^3)$

$\begin{pmatrix} 150 & 400 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=1750\ (cm^3)$

$$(150 \quad 400)\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = 3550\ (cm^3)$$

$$(150 \quad 400)\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} = 3600\ (cm^3)$$

價格：$$(100\ ,150)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 600\ (\text{元})$$

$$(100 \quad 150)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = 200\ (\text{元})$$

$$(100 \quad 150)\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = 1550\ (\text{元})$$

$$(100 \quad 150)\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} = 1700\ (\text{元})$$

因此得一矩陣表示爲

$$R = \begin{pmatrix} 1200 & 1400 & 3100 & 3400 \\ 1250 & 1750 & 3550 & 3600 \\ 600 & 700 & 1550 & 1700 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots\cdots\text{重　量} \\ \cdots\cdots\text{體　積} \\ \cdots\cdots\text{價　格} \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{王一} & \text{林二} & \text{張三} & \text{李四} \end{array}$$

這是由矩陣P之列向量與矩陣Q之行向量作內積的結果，我們寫作

$$PQ = R$$

這個例子是$P = (p_{ij})_{3\times 2}$，$Q = (q_{jk})_{2\times 3}$，則$R = (r_{ik})_{3\times 3}$，方法是將P的第 i 列向量與Q的第k行向量作內積的結果就是R的第 i 列第k行元素r_{ik}，即

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^{3} p_{ij} \times q_{jk}$$

從這一個例子，我們易於形成一般兩個矩陣的乘積，如

$$A = (a_{ij})_{m\times l}\ ,\ B = (b_{jk})_{l\times n}$$

則A的第 i 列向量與B的第 k 行向量之內積：

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \cdots\cdots a_{il})\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{lk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}\, b_{jk} = c_{ik}$$

就是AB之第 i 列第 k 行之元素，所以

(8)
$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\ell} a_{1j}\, b_{j1} & \sum_{j=1}^{\ell} a_{1j}\, b_{j2} \cdots\cdots & \sum_{j=1}^{\ell} a_{1j}\, b_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{\ell} a_{mj}\, b_{j1} & \sum_{j=1}^{\ell} a_{mj}\, b_{j2} \cdots\cdots & \sum_{j=1}^{\ell} a_{mj}\, b_{jn} \end{pmatrix}$$

這裡做矩陣A、B之積時，應注意的一點是A的行數與B之列數必須相等才能做乘積，否則乘積不存在。即如下列：$(m\times \ell$ 矩陣$)\cdot(\ell \times n$ 矩陣$) = (m\times n$ 矩陣$)$

$$\left(\begin{array}{c} \ell\text{行} \\ m\ \boxed{\text{列}\quad A} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} n\text{行} \\ \ell\ \boxed{\text{列}\quad B} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} n\text{行} \\ m\ \boxed{\text{列}\quad AB} \end{array}\right)$$

矩陣的乘法一般不滿足交換律，即

$$AB \neq BA$$

如 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 則

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}\neq AB,$$

但乘法滿足結合與分配法則，即 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，$C=(c_{ij})_{p\times q}$

則 (9)　$(AB)C=A(BC)$，是 $_{m\times q}$ 矩陣

又若　$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，$C=(c_{ij})_{n\times p}$，則

(10)　$A(B+C)=AB+AC$，是 $_{m\times p}$ 矩陣。

當然若 B，C 都是 $_{n\times p}$ 矩陣，而 A 為 $_{p\times m}$ 矩陣，則

(10)′　$(B+C)A=BA+CA$，是 $_{n\times m}$ 矩陣，(10)，(10)′ 分別稱爲右、左分配律。

在矩陣的加法中有 $\mathbf{0}$ 矩陣，爲其加法的單位元，而在乘法裏也有單位元爲單位矩陣 $I=(x_{ij})$，其元素

$$x_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}\text{，即 } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots 1 \end{pmatrix}$$

這個單位矩陣，必須是方陣，且滿足

(11)　$IA=A$，　（此時若 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，則 I 爲 $n\times n$）

$AI=A$　（此時若 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，則 I 爲 $m\times m$）

$II=I$

在矩陣乘法裏，若 $AB=\mathbf{0}$，並不能像數的乘法那樣得 $A=\mathbf{0}$ 或 $B=\mathbf{0}$，蓋如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\text{，則 } AB=0$$

但　$A\neq\mathbf{0}$，$B\neq\mathbf{0}$，像這樣子　非 $\mathbf{0}$ 之矩陣 A、B 之積爲 $\mathbf{0}$ 矩陣者，稱爲零因子（*zero divisor*）

在同型之方陣中，矩陣的乘法，加法運算可類似數的演算一樣處理，如在數中

$$(a+b)(c+d+f)=ac+ad+af+bc+bd+bf$$

及

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

等在方陣中就有

$$(A+B)(C+D+F)=AC+AD+AF+BC+BD+BF,$$

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$$

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$

該特別提醒的一點是$AB \neq BA$。

由於向量可看作矩陣之一行或一列，因此$m \times n$矩陣，可寫作n個分量爲m維行向量之$1 \times n$矩陣：

$$A = (A_1, A_2, \cdots\cdots A_n),$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots\cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

也可看作m個分量之n維列向量所成的$m \times 1$矩陣：

$$A = \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_m' \end{pmatrix},$$

其中

$$A_j' = (a_{j1}, a_{j2}, \cdots\cdots a_{jn}),$$

$$j = 1, 2, \cdots\cdots, m。$$

又特別考慮一行一列之矩陣，就是普通的數，所以其演變有如

矩陣→向量→數（純量）

反過來說，數換成向量，向量再擴大成矩陣，如

$$a \rightarrow A = (A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n)$$

而A_n爲行向量，則A表成一矩陣，即

數→向量→矩陣

更進一層的，這種想法可進展爲矩陣之各元素也是矩陣的情形，例如對於矩陣

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

在同一列之矩陣A_{11}，A_{12}，A_{13}或A_{21}，A_{22}，A_{23}之列數分別都相等，且在同一行之矩陣如A_{11}，A_{21}；A_{12}，A_{22}；以及A_{13}，A_{23}的行數也必須分別相等。這種矩陣A是由A_{11}，A_{12}，……，A_{23}等矩陣所形成的大矩陣，而原先之矩陣A_{11}，……A_{23}等都稱爲小矩陣。

由上述形式，我們知道一個矩陣，可以分成幾個小矩陣，幾個小矩陣也可擴成一大矩陣，祇要在各矩陣之行、列個數做合理的安排即可。

下面我們列幾個練習題，由讀者自行練習。

練 習 問 題

1. 設$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，試求$AB$及$BA$，並示明$AB \neq BA$，以及$A \neq 0$，$B \neq 0$卻得$AB = 0$。
2. 若兩向量$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，試證明（即如畢氏定理）
   $$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$$
3. 設$\boldsymbol{a} = (0, 1, 1)$，$\boldsymbol{b} = (1, 0, 1)$，$\boldsymbol{c} = (1, 1, 0)$
   試將向量$\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$與$\boldsymbol{y} = (4, 5, 6)$分別用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$線性結合表示出來。（答：$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y} = \frac{7}{2}\boldsymbol{a} + \frac{5}{2}\boldsymbol{b} + \frac{3}{2}\boldsymbol{c}$）
4. 試計算　$2(2, 0, -1) + \sqrt{2}\left(\frac{2}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right) - 3(1, 1, 8)$

5. 試計算

① $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ $(2 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ④ $(2 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

答：$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(2, 1, -4)$, $(2, 3, 1, 0)$。

6. 設 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

試證明 $(AB)C=A(BC)$

7. 設 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求$A^2+5A$ 答:$\begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 42 \end{pmatrix}$

8. 若$f(t)=2t^3-4t+5$，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$，試求$f(A)$

答：$\begin{pmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{pmatrix}$

9. 若$g(t)=t^2+2t-11$，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$，求$g(A)$

答：$g(A)=A^2+2A-11I=0$

10. 設I爲單位方陣，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，試證明 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=0$

11. 設 $x^2+ax+b=0$之兩根爲α、β，試證明

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

提示：左邊$=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -b-a\alpha & -b-a\beta \end{pmatrix}$，右邊$=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}$

但$\alpha^2+a\alpha+b=0$，$\beta^2+a\beta+b=0$，∴左邊=右邊。