數學傳播 47卷3期, pp. 94-104

人算不如機算
—電腦輔助數學探索兩例

彭翕成 · 曹洪洋

人類解決問題, 憑藉的是以往經驗, 加上臨時的靈光閃現。有些問題相當複雜, 超過人腦能處理的範疇, 雖說人算不如天算, 可惜天意從來高難問, 還是借助電腦這個工具比較靠譜。君子生非異也, 善假於物也。電腦的優勢是不知疲憊, 計算速度快, 對於能夠演算法化、遍歷窮舉的問題, 能較好地解決。本文將分享兩則基於數學軟體 Mathematica 輔助探索的案例, 希望這兩則案例探索所得結論或是探索使用的方法, 能給讀者朋友帶來啟發。正文中會大致介紹解決問題的思路, 相關的 Mathematica 代碼見本文附錄。

案例1: 探索關聯正多邊形的面積相等問題。

如圖 1, 分別以 $\triangle ABC$ 的 AB、AC 邊向外作正方形 $BADE$、$ACGF$, 則 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AFD}$。這個幾何性質常見, 也顯然。如果將這一問題進行擴展, 探索圖 1 中 7 點所構成的三角形面積相等關係, 就未必容易。

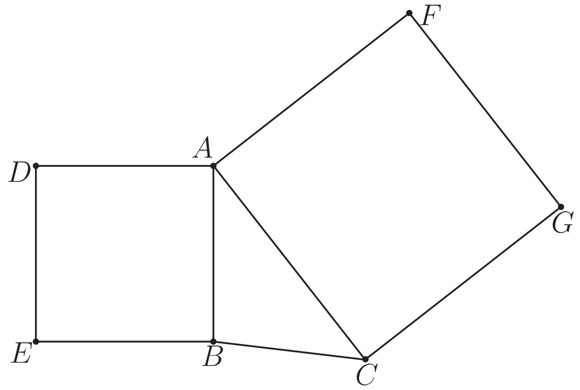

圖1

初步分析:

第1類: 類似 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE}$, 結論極其顯然, 小學生都能輕鬆看出。

第2類: 類似 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AFD}$ 或 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABF}$, 是中學數學中的常見結論。

第3類: 類似 $S_{\triangle ADG} = S_{\triangle AEF}$ 或 $S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ABG}$, 可看作是第2類結論的進一步加深。

是否還存在另外形式? 難找到, 並不意味著就不存在。7 個點選 3 個, 可構成 $C_3^7 = 35$ 個三角形。35 個三角形面積兩兩比較, 有 $C_2^{35} = 595$ 種可能。只有遍歷所有情況, 才能得到確切的結論。而這對於人工演算, 工作量很大。

基於座標, 使用行列式計算三角形面積是比較方便的。因此不妨設 $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (xc, yc)$, $D = (0,-1)$, $E = (1,-1)$, $F(-yc, xc)$, $G = (xc - yc, xc + yc)$。計算點的座標, 用向量和複數的性質比較簡單。如設 $D = (xd, yd)$, 則根據 $\overrightarrow{AD}i = \overrightarrow{AB}$, 即 $[(xd + ydi) - (0 + 0i)]i = (1 + 0i) - (0 + 0i)$, 解得 $xd = 0$, $yd = -1$。其餘點的座標都可照此方法計算。

從點座標集合 $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ 中任取 3 個, 然後利用三角形面積公式 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right\|$, 公式裡面的兩分隔號表示行列式, 外面的兩分隔號表示絕對值。計算 35 個三角形面積, 電腦只需花費幾秒。除去上文討論過的類型, 電腦還發現以下三個結論 (形式對稱的只算一種)。爲方便這些結論在教學、測試或競賽中使用, 我們另外給出證明。

結論 1: 如圖 2, 以 $(xc, yc), (0,-1), (1,-1)$ 和 $(1,0), (1,-1), (-yc, xc)$ 爲頂點的三角形面積都爲 $\dfrac{|1+yc|}{2}$, 即 $S_{\triangle DEC} = S_{\triangle FEB}$。

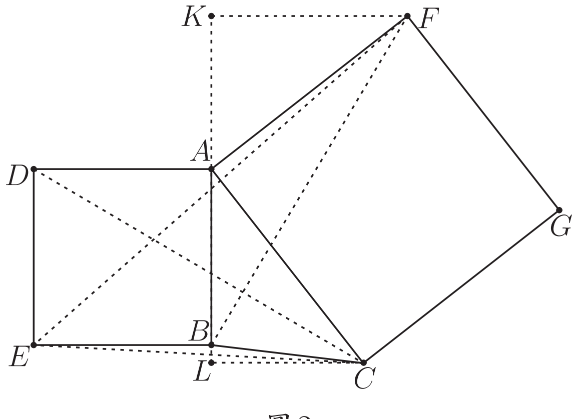

圖 2

證明: 過 F 作 $FK \perp AB$ 於 K, 過 C 作 $CL \perp AB$ 於 L。$\triangle DEC$ 中 DE 所對的高爲 $EB + LC = EB + AC \sin\angle BAC$; $\triangle FEB$ 中 EB 所對的高爲 $BA + AK = EB + AF \sin\angle BAC$; 所以 $\triangle DEC$ 和 $\triangle FEB$ 等底等高, $S_{\triangle DEC} = S_{\triangle FEB}$。

結論 2: 如圖 3, 以 $(0,-1), (1,-1), (xc - yc, xc + yc)$ 和 $(0,-1), (1,0), (-yc, xc)$ 爲頂點的三角形面積都爲 $\dfrac{|1 + xc + yc|}{2}$, 即 $S_{\triangle GDE} = S_{\triangle DBF}$。

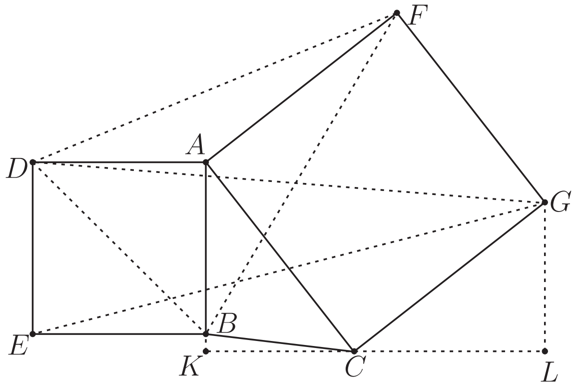

圖3

證明: 過 C 作 $CK\perp AB$ 於 K, 過 G 作 $GL\perp CK$ 於 L。

$$\begin{aligned}2S_{\triangle GDE} =& DE\cdot(EB+KC+CL)=DE^2+DE\cdot KC+DE\cdot AC\cdot\cos\angle BAC\\ =& 2S_{\triangle ADB}+2S_{\triangle ABC}+DE\cdot AC\cdot\sin(\angle BAC+90^\circ)\\ &= 2S_{\triangle ADB}+2S_{\triangle AFD}+2S_{\triangle ABF}=2S_{\triangle DBF}.\end{aligned}$$

結論3: 如圖 4, 以 $(1,-1),(1,0),(xc-yc,xc+yc)$ 和 $(0,-1),(1,0),(xc,yc)$ 爲頂點的三角形面積都爲 $\dfrac{|1-xc+yc|}{2}$, 即 $S_{\triangle GEB}=S_{\triangle DBC}$。

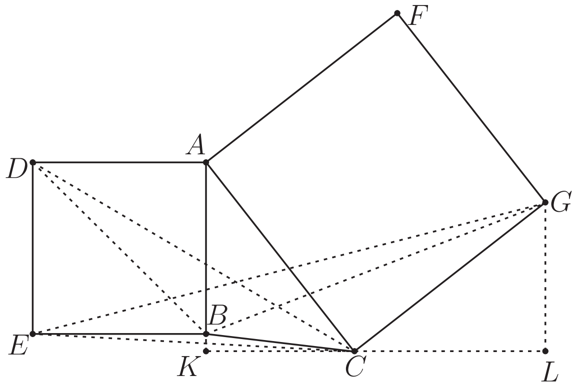

圖4

證明: 過 C 作 $CK\perp AB$ 於 K, 過 G 作 $GL\perp CK$ 於 L。連接 CE。

$$2S_{\triangle GEB}=EB\cdot(GL-BK)=EB\cdot(AC\cdot\sin\angle BAC+BC\cdot\cos\angle ABC),$$

$$\begin{aligned}2S_{\triangle DBC}&=2S_{\triangle DEC}-2S_{\triangle DEB}-2S_{\triangle EBC}\\ &=DE\cdot(EB+KC)-DE^2-EB\cdot BC\cdot\sin\angle EBC\\ &=DE\cdot AC\cdot\sin\angle BAC+EB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC,\ \text{所以}\ S_{\triangle GEB}=S_{\triangle DBC}.\end{aligned}$$

以上三個結論, 證明並不是太困難, 但希望憑藉人的觀察就能發現, 頗爲不易。我們將上述問題擴展, 即分別以 $\triangle ABC$ 的 AB、AC 邊向外作正 n 邊形, 這些頂點構成的三角形, 面積關係如何? 事實上, 基於上文方法發現相等面積的三角形後, 還可進一步將圖形構造出來, 這樣就更直觀一些。圖 5 是基於 Mathematica 發現的結論, 其中 $n=4,5$, 供有興趣的讀者進一步探索。

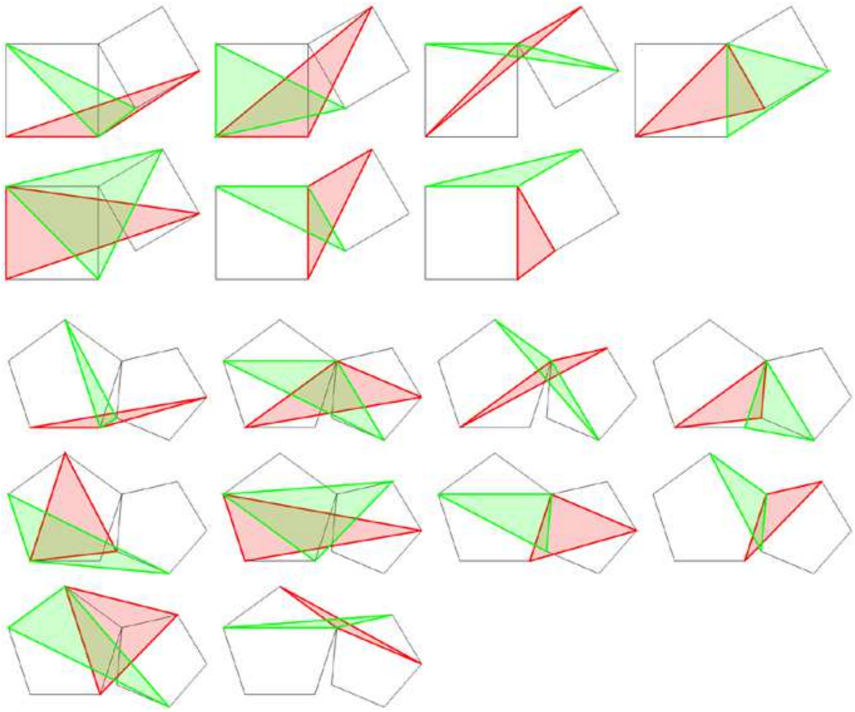

圖 5

案例 2: 探索三角形各邊等分點連線的三線共點問題。

一本科普資料上記載這樣一道趣題。如圖 6, $\triangle ABC$ 中, 將 BC 二等分, BA 三等分, AC 四等分, 嘗試連接這些等分點, 盡可能多地找到哪些三點共線的情況。類似 BA、DA、CA 三線共點的平凡情況忽略。

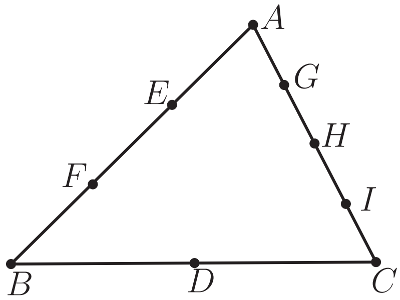

圖 6

此題如何解, 又如何推廣?

用座標容易表示等分點。設 C 是 AB 中點, 則 $x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}$、$y_C=\dfrac{y_A+x_B}{2}$, 橫縱坐標兩個式子形式上完全一樣, 使用向量表示 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ 可做到二合一。如果嫌向量符號麻煩, 可把向量看作是終點和起點之差, 則 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ 轉化為 $C-A=B-C$ 或 $C=\dfrac{A+B}{2}$, 可看成是 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ 或 $x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}$、$y_C=\dfrac{y_A+x_B}{2}$ 的濃縮版。這裡的字母 X 看作 $\overrightarrow{OX}$ 的省寫, 任意點 O 為原點。類似定義直線 AB 上的點 $C=tA+(1-t)B$。當 $t=\dfrac{1}{2}$ 時, 即為中點。擴展開去, $\triangle ABC$ 平面上任意點定義為 $P=xA+yB+(1-x-y)C$。這樣定義的好處是使用少量符號描繪幾何事實, 簡明而幾何意義豐富。

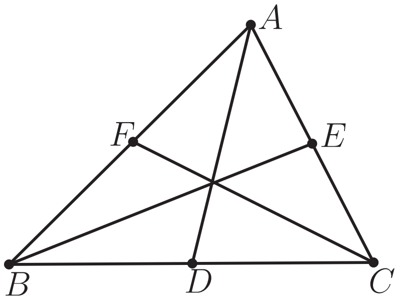

圖7

如著名的重心定理即可用恒等式表示: $\dfrac{A+B+C}{3}=\dfrac{2}{3}\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{1}{3}C=\dfrac{2}{3}\dfrac{A+C}{2}+\dfrac{1}{3}B=\dfrac{2}{3}\dfrac{B+C}{2}+\dfrac{1}{3}A$. 幾何意義是存在點 $\dfrac{A+B+C}{3}$ 在 AD 上, 因為 $\dfrac{A+B+C}{3}=\dfrac{2}{3}\dfrac{B+C}{2}+\dfrac{1}{3}A$, 此處 $D=\dfrac{B+C}{2}$, 還說明點 $\dfrac{A+B+C}{3}$ 是 AD 的三等分點。同理點 $\dfrac{A+B+C}{3}$ 在 BE、CF 上。

恒等式表示幾何定理, 既包括定理的敘述, 同時也是定理的證明。

回到原問題, 經過嘗試, 我們得到兩組解, 所對應圖形 (圖 8) 和恒等式如下:

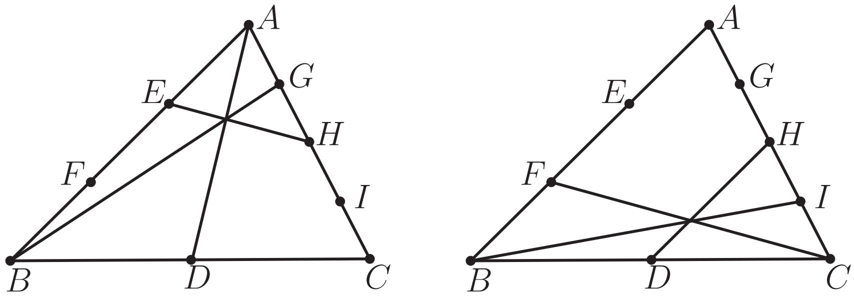

圖8

$$\frac{3A+B+C}{5}=\frac{2}{5}\,\frac{B+C}{2}+\Big(1-\frac{2}{5}\Big)A=\frac{4}{5}\,\frac{3A+C}{4}+\Big(1-\frac{4}{5}\Big)B=\frac{2}{5}\,\frac{A+C}{2}+\Big(1-\frac{2}{5}\Big)\frac{2A+B}{3},$$
$$\frac{A+2B+3C}{6}=\frac{2}{3}\,\frac{A+3C}{4}+\Big(1-\frac{2}{3}\Big)B=\frac{2}{3}\,\frac{B+C}{2}+\Big(1-\frac{2}{3}\Big)\frac{A+C}{2}=\frac{1}{2}C+\Big(1-\frac{1}{2}\Big)\frac{A+2B}{3}.$$

是否還存在其他情形? 雖人工試驗多次, 但未必沒有漏網之魚。爲了一網打盡, 還得借助電腦進行遍歷搜索。

思路: 每次從點集合 $P:\Big\{A,B,C,\dfrac{A+2B}{3},\dfrac{2A+B}{3},\dfrac{B+C}{2},\dfrac{A+3C}{4},\dfrac{A+C}{2},\dfrac{3A+C}{4}\Big\}$, 中選取 6 個爲一組 $\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$, $P_i\in P$ 表示三條直線 P_1P_2、P_3P_4、P_5P_6, 若方程組 $xP_1+(1-x)P_2=yP_3+(1-y)P_4=zP_3+(1-z)P_6$ 存在解, 則符合要求。遍歷所有情況, 發現確實只有上面兩組解。

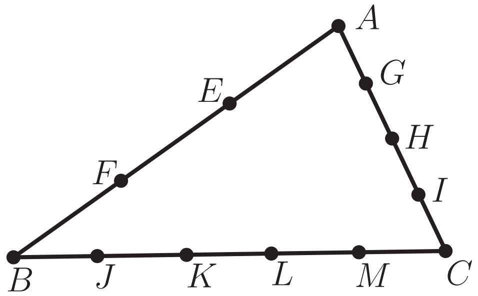

圖 9

下面我們將上述問題進行擴展。探索 $\triangle ABC$ 中 (圖 9), 將 BC 五等分, BA 三等分, AC 四等分, 嘗試連接這些等分點, 能找到哪些三點共線的情況。

經電腦搜索, 共 22 種可能, 如圖 10 所示。

圖 10 中前 3 個圖形所對應恒等式如下:

$$\begin{aligned}\frac{10A+3B+12C}{25}&=\frac{3}{5}\,\frac{B+4C}{5}+\Big(1-\frac{3}{5}\Big)A=\frac{16}{25}\,\frac{A+3C}{4}+\Big(1-\frac{16}{25}\Big)\frac{2A+B}{3}\\&=\frac{1}{5}\,\frac{3B+2C}{5}+\Big(1-\frac{1}{5}\Big)\frac{A+C}{2},\\ \frac{A+2B+3C}{6}&=\frac{5}{6}\,\frac{2B+3C}{5}+\Big(1-\frac{5}{6}\Big)A=\frac{2}{3}\,\frac{A+3C}{4}+\Big(1-\frac{2}{3}\Big)B\\&=\frac{C}{2}+\Big(1-\frac{1}{2}\Big)\frac{A+2B}{3},\\ \frac{4A+2B+3C}{9}&=\frac{5}{9}\,\frac{2B+3C}{5}+\Big(1-\frac{5}{9}\Big)A=\frac{2}{3}\,\frac{A+C}{2}+\Big(1-\frac{2}{3}\Big)\frac{A+2B}{3}\\&=\frac{C}{3}+\Big(1-\frac{1}{3}\Big)\frac{2A+B}{3},\end{aligned}$$

其餘以此類推。

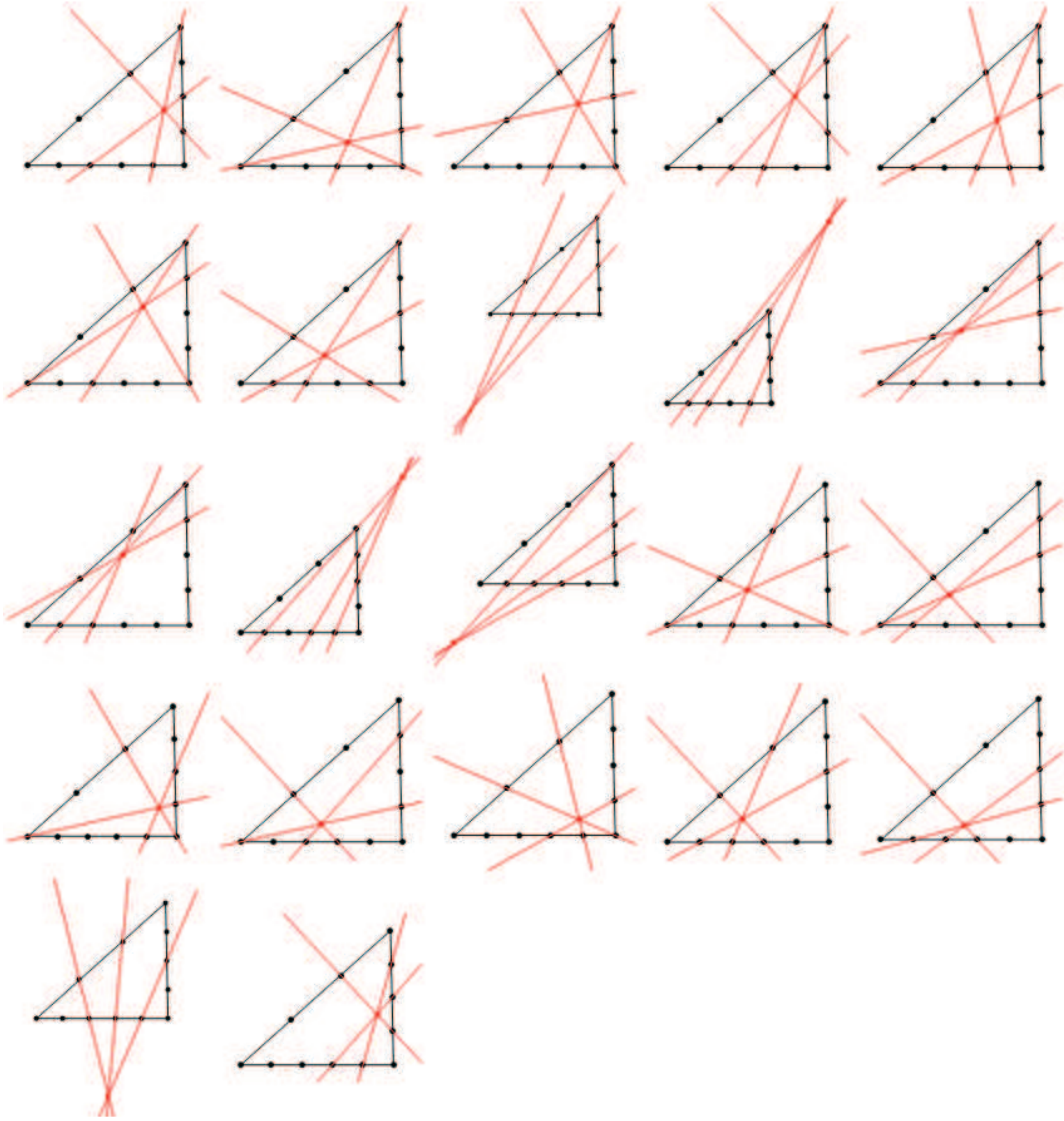

圖 10

目前初等數學的研究, 多數時候還是紙筆手算, 也有數學老師使用數學軟體幾何畫板或 GeoGebra 等。這兩個軟體作幾何圖形方便, 且具備測量多邊形面積等功能, 還能通過拖動點的方式來動態觀察圖形中蘊含的性質, 爲研究案例 1 這樣的問題, 提供了便利。假設你猜想哪兩個三角形的面積相等, 就可以通過測量的方式來驗證。但問題是, 有時根本提不出猜想, 那就難辦了。但這種情況下, 窮舉是笨方法, 也是好方法。而案例 1 涉及 35 個三角形, 如果基於幾何畫板或 GeoGebra, 靠手工一個個去測量, 需要花費較多時間, 且容易遺漏。案例 2 也是如此, 不斷地在圖形中畫三條直線, 看是否交於一點, 這樣的操作提供給小學生練習觀察力, 讓他們享受發現的樂趣, 是可以的。但如果拿給中學生, 特別是成年人來做, 就有點浪費時間。我們應該

把精力留給做更有創造力的事情, 譬如設計思路和演算法, 具體地"畫線和計算"留給 Mathematica 這種具有強大程式設計功能的軟體來完成。正如數學大師萊布尼茲所言, 一個出色的人像奴隸一樣把時間浪費在計算的勞動上是很不值得的, 有了機器, 這種工作可以放心地交給任何人。在電腦高速發展的今天, 萊布尼茲的建議格外值得體味。

同時也要注意, 目前的電腦雖然已經能自動推理一些數學問題, 但離人的高級智慧還有距離。在案例 1 中, 如果希望電腦生成本文作者給出的證明, 進而找到面積相等的三角形, 恐怕難度較大。而基於座標計算, 正是電腦所擅長。所以我們要取長補短, 人機協同, 共同解決一些難題。

附錄 (本文實驗 mathematica 代碼)

案例1:

下面代碼能找出 7 個點構成的 35 個三角形中, 哪些面積相等。由於 C, D, E 在 mathematica 中被保留爲常數、求導、歐拉常數, 因此涉及點的標籤用 C1, D1, E1 表示。

```
Clear["‘*"];
A = {0, 0}; B={1,0};C1 = {xc, yc}; E1 = {1, -1};
D1 = {0, -1}; F = {-yc, xc}; G = C1 + F;
(*寫出所有點的座標*)
Subsets[{A, B, C1, D1, E1, F, G}, {3}](*每次取三個點的座標*)
Area@Polygon[#] & /@ Subsets[{A, B, C1, D1, E1, F, G}, {3}]
(*測量所取三個點構成的三角形面積*)
SortBy[Thread[%% -> %], Last];(*根據三角形面積進行排序*)
Framed /@ GatherBy[%,Last] /. {(k_ -> v_) :> (k ->Style[v, Red])} // Column
(*將面積相等的三角形收集在一起*)
```

下面代碼能自動生成圖 5, 可嘗試將 n 改成其他大於 4 的整數。

```
n = 4;
pts = Table[(-1)^((2 i - 3)/n - 1/2), {i, n}];(*生成第一個正 n 邊形的頂點*)
pt = pts[[3]];
pts2 = pt + (pts - pt) RandomReal[{0.8, 0.82}]
E^(I RandomReal[{120, 123} Pi/180]);
(*生成第二個正 n 邊形的頂點*)
pair = Cases[GatherBy[Flatten[Table[{pts[[i]], pts[[j]],k},{i,n},{j,i+1,n},
{k, Select[pts2, Abs[# - pt] > 10^-8 &]}], 2],
```

```
Round[Abs@Im[Conjugate[#]. RotateLeft[#]], 10.^-8] &], {_, _}];
(*將所有面積相等的三角形收集在一起*)
Graphics[{RegionBoundary /@ Polygon /@ ReIm@{pts, pts2}, {Opacity[0.2],
Flatten@Riffle[{EdgeForm[{#,Thick}],#} &/@{Red,Green},Polygon/@ ReIm@#]}},
BaseStyle -> 14, ImageSize -> 250] & /@ pair //
Partition[#, 2, 2, 1, {}] & // Grid (*繪製圖形, 使之視覺化*)
```

案例2:

下面代碼能自動生成圖 10。

```
Clear["‘*"];
eps = 10^-8.;
sameLine[{{x1_, y1_}, {x2_, y2_}}]
:=Round[#/Total@# &@{y1-y2, x2-x1, x1 y2-x2 y1}, eps];
lineConcurrent[{{{x1_,y1_},{x2_,y2_}},{{x3_,y3_},{x4_, y4_}},
{{x5_, y5_},{x6_, y6_}}}] := Abs[Det[{{y1-y2, x2-x1, x1 y2-x2 y1},
{y3-y4, x4-x3, x3 y4-x4 y3}, {y5-y6, x6-x5, x5 y6-x6 y5}}]] < eps;
(*判斷三條線是否共點*)
{A1, B1, C1} = {RandomReal[{0.3, 1}, 2], {0, 0}, {1, 0}} // N;
{X1, X2} = ({{1, 2}, {2, 1}}/3) . {A1, B1};
{Y1, Y2, Y3} = ({{1, 3}, {2, 2}, {3, 1}}/4) . {C1, A1};
{Z1,Z2,Z3,Z4} = ({{1, 4},{2, 3},{3, 2},{4, 1}}/5) . {B1, C1};
(*生成基本圖形*)
Dimensions[
 ans = Select[Select[Subsets[DeleteDuplicatesBy[Subsets[{A1,
 B1, C1, X1, X2, Y1, Y2, Y3, Z1, Z2, Z3, Z4}, {2}], sameLine], {3}],
 DuplicateFreeQ@*Catenate], lineConcurrent]];
Length /@ (gb =GatherBy[ans, Equal @@
Round[Mod[ArcTan @@@ Subtract @@@ #, Pi], eps] &]);
Graphics[{Line[{A1, B1, C1, A1}], PointSize[0.03],
      Point[{A1, B1, C1, X1, X2, Y1, Y2, Y3, Z1, Z2, Z3, Z4}],
      {Red, InfiniteLine /@ #,
       RegionIntersection[InfiniteLine /@ #[[1 ;; 2]]]}},
     PlotRangePadding -> Scaled[.1]] & /@ gb[[1]] //
  Partition[#,5,5,1, {}] & // Grid(*遍歷查找三線共點的情況, 作圖輸出*)
```

下面代碼能自動生成 22 個恒等式。

```
Clear["‘*"];
(*定義三點共線的函數 sdgxQ*)
sdgxQ[{P1_, P2_, P3_, P4_, P5_, P6_}] := Module[{ },
   sol = {Solve[
      Coefficient[t1 P1 + (1 - t1) P2 -  P3 , {A, B, C}] == 0, {t1,
       t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t2 P1 + (1 - t2) P2 -  P4 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t3 P1 + (1 - t3) P2 -  P5 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t4 P1 + (1 - t4) P2 -  P6, {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t5 P3 + (1 - t5) P4 -  P1 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t6 P3 + (1 - t6) P4 -  P2 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t7 P3 + (1 - t7) P4 -  P5 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t8 P3 + (1 - t8) P4 -  P6 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t9 P5 + (1 - t9) P6 -  P1 , {A, B, C}] == 0, {t1,
       t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t10 P5 + (1 - t10) P6 -  P2 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t11 P5 + (1 - t11) P6 -  P3 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }],
     Solve[Coefficient[t12 P5 + (1 - t12) P6 -  P4 , {A, B, C}] ==
       0, {t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12 }]}// Flatten;
    If[sol =!={}, False, True ]]
(*求出三線共點的交點*)
f[{P1_, P2_, P3_, P4_, P5_, P6_}] := Module[{ },
  sol = Solve[Coefficient[k1 P1+(1-k1)P2-(k2 P3+(1-k2) P4), {A,B,C}]==0
&& Coefficient[k1 P1+(1-k1) P2-(k3 P5+(1-k3) P6), {A,B,C}]==0 && k1!=0
```

```
&& k1!=1 && k2!=0 && k2!=1 && k3!=0 && k3!=1, {k1,k2,k3}] // Factor;

If[sol=!={},{k1 P1 + (1 - k1) P2 /. sol[[1]] //
Factor, HoldForm[k1 P1 +(1-k1)P2==k2 P3+(1-k2)P4
==k3 P5+(1-k3)P6] /. sol[[1]]}, Nothing]]
pailie6[{P1_,P2_,P3_,P4_,P5_,P6_}] := Module[{ },{{P6, P1, P5, P2, P4, P3},
{P6, P1, P5, P3, P4, P2},{P6, P1, P5, P4, P3, P2},{P6, P2, P5, P1, P4, P3},
{P6, P2, P5, P3, P4,P1},{P6, P2, P5, P4, P3, P1},{P6, P3, P5, P1, P4, P2},
{P6, P3,P5, P2, P4, P1},{P6, P3, P5, P4, P2, P1},{P6, P4, P5, P1, P3, P2},
{P6, P4, P5, P2, P3, P1},{P6, P4, P5, P3, P2, P1},{P6, P5,P4, P1, P3, P2},
{P6, P5, P4, P2, P3, P1},{P6, P5, P4, P3, P2,P1}}]
 (*pailie6是對六點進行排列。*)
V5 = {A, B, (A + 2 B)/3, (2 A + B)/3, (4 B + C)/5, (2 B + 3 C)/5,
(3B+2C)/5,(B+4 C)/5,(4B+C)/5,(A+3C)/4, (3A+C)/4, (A+C)/2,C} // Union;
SS1 =  Flatten[pailie6 /@ Union@Subsets[V5, {6}], 1]  ;
SS5 = Select[SS1, sdgxQ ];
f /@ SS5 //. {{A, _} -> 0, {B, _} -> 0, {C, _} -> 0}
```

—本文作者彭翕成任教中國華中師範大學人工智能教育學部, 曹洪洋任職中國常州九章教育科技有限公司—

勘誤表

第 29 卷第 1 期 (113號), 11 頁, Line 11。

$$=\frac{1}{n-1}\{n[\mathrm{Var}(x_i)+E^2(x_i)]=n[\mathrm{Var}(\overline{x})+E^2(\overline{x})]\}$$

應爲：

$$=\frac{1}{n-1}\{n[\mathrm{Var}(x_i)+E^2(x_i)]-n[\mathrm{Var}(\overline{x})+E^2(\overline{x})]\}$$